平成 17 年 6 月 9 日

電磁気学演習 No.8 (導体系と静電場の復習)

問 1 * **(電気双極子)** 点電荷 $-q$ が原点にあり, 点電荷 q が位置ベクトル $\boldsymbol{d}$ にある.

(a) ** この 2 つの点電荷の距離に比べて遠く離れた任意の点 $\boldsymbol{r}$ $(d \ll r)$ におけるポテンシャルが以下で与えられることを示せ.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}$$

(b) * 上のポテンシャルより, 電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{d}}{r^3}\right)$$

となることを示せ.

問 2 ** **(ガウスの法則)** 静電ポテンシャルが原点からの距離 r の関数として, 以下のように与えられているとする.

$$\Phi(r) = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

(a) 電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

(b) 電荷密度 $\rho(r)$ $(r \neq 0)$ を微分型ガウスの法則を用いて求めよ.

(c) 原点に存在する点電荷の電荷を積分型ガウスの法則を用いて求めよ. (ヒント: 原点を中心とする微小な半径の球を考え, これに積分型ガウスの法則を適用し、半径無限小の極限を考えよ.)

(d) この系の全電荷を求めよ.

問 3 * **(2つの導体球殻)** 真空中に中心を共有する二つの導体球殻があり, それらの半径を a および b $(b > a)$ とする. 外側の導体球殻は接地されており, その電位はゼロ, 内側の導体球殻の電位を V とする.

(a) $b > r > a$ でこの系のポアソン方程式を解くことにより, 静電ポテンシャル, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, 図示せよ.

(b) 内球の外側表面の電荷密度 σ を求めよ.

(c) この 2 つの導体球殻の静電エネルギー U を $U = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_{\text{全空間}} E(\boldsymbol{r})^2 dV$ より計算せよ. (その際, $r > b$ および $r < a$ での電場についても考察せよ.)

(d) この系をコンデンサーとみなすとき, 静電容量 C を求めよ.

(e) 電位 V を一定に保ったまま内球の半径を変化させる. このとき, 内球の外側表面の電場の大きさを最大にする内球の半径を求めよ.

問 4* **(3つの導体円筒)** 軸を共有する長さ l, 半径が $a,\ b,\ c$ の 3 つの導体円筒がある ($c > b > a$). 外側と内側の円筒は十分細い導線で結ばれており, その電位はゼロである. 一方半径 b の円筒の電位は V である. 円筒の長さ l はその半径に比べ十分大きいとして以下の問いに答えよ.

(a) 静電ポテンシャルを中心軸からの距離 R の関数として求めよ.

(b) 半径 b の円筒の内側および外側表面に誘起される電荷を求めよ.

(c) この系をコンデンサーとみなすとき, 静電容量 C を求めよ.

(d) この系の静電エネルギー U を求め, $U = \frac{1}{2}CV^2$ と表されることを確かめよ.

問 5* **(クーロンの法則)** 中心軸が z 軸上にある高さ h, 半径 a の円筒に一様な面電荷密度 σ で電荷が分布している. この円筒の中心が原点にあるとして, 以下の問いに答えよ.

(a) この円筒上で z 座標が $z' < z < z' + \Delta z'$ であるような円環状領域にある電荷が z 軸上の点 $(0,\ 0,\ z)$ に作る電場 $\Delta \boldsymbol{E}$ が以下のようになることを示せ. ただし, $\Delta z'$ は十分小さいとする.

$$\Delta \boldsymbol{E}(z) = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{(z - z')\Delta z'}{\{a^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} \boldsymbol{e}_z$$

(b) この円筒上の電荷が z 軸上に作る電場を z の関数として求め, それを図示せよ.