平成 17 年 6 月 16 日

電磁気学演習 No.9 (中間テスト)

問 1 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるとき以下を計算せよ.

(a) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$

(b) $\nabla f(r)$

(c) $\nabla^2 g(r)$

問 2 z 軸を中心軸とし，x-y 平面上にある半径 a の円盤上に面密度 σ の電荷が一様に分布している．このとき，以下の問に答えよ．

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ．

(b) z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ．

(c) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より，z 軸上における電場の z 成分 E_z を求め，(a) の答えと一致することを示せ．

(d) $a \to \infty$ とすると，円盤は無限に広い平面となる．このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め，z の関数として図示せよ．

問 3 真空中に半径 a の無限に長い円柱があり, その内部に電荷が電荷密度 ρ で一様に分布している．

(a) ガウスの法則を用いて電場 $\boldsymbol{E}$ を求め，その大きさを中心軸からの距離 R の関数として図示せよ．

(b) 静電ポテンシャル Φ を求め，R の関数として図示せよ．ただし，静電ポテンシャルは中心軸上でゼロとする．

問 4 真空中に中心を共有する半径 a と半径 b の導体球殻がある $(b > a)$. 内側の導体球殻は接地されており, その静電ポテンシャルをゼロとする. 一方, 外側の導体球殻の静電ポテンシャルを $V > 0$ とする. これら導体球殻の厚さはその半径に比べ十分薄いとする.

(a) 中心からの距離を r とするとき, 静電ポテンシャル $\Phi(r)$ と電場 $\boldsymbol{E}(r)$ を求め, r の関数として図示せよ. なお, 極座標系 (r, θ, φ) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを用いてよい.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

(b) 半径 a の球殻の外側の表面に分布する電荷の面電荷密度 σ_1 と半径 b の球殻の内側および外側表面に分布する電荷の面電荷密度, σ_2 および σ_3 を求めよ.

(c) この系の静電エネルギー U を求めよ．