

電磁気学演習 No.1 (ベクトル、多重積分の復習)

問 1 (ベクトル)* 以下のベクトル関係式を証明せよ.

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \\ A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) &= 0 \end{aligned}$$

問 2 (ベクトル)** ベクトル B をベクトル A に平行なベクトルと垂直なベクトルの和で書き表わすと以下のようになることを示せ.

$$B = \frac{A \cdot B}{A^2} A + \frac{(A \times B) \times A}{A^2}$$

問 3 (線積分)* 長さ L の棒がある. この棒の線密度 (すなわち, 単位長さ当たりの質量) λ は棒の片端からの距離 x の関数として,

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x/L)^2$$

で与えられている. この棒の質量を求めよ. ただし, λ_0, λ_1 は定数である.

問 4 (面積分)* 半径 R の薄い円盤がある. この円盤の面密度 (すなわち, 単位面積当たりの質量) σ は円盤の中心からの距離 r の関数として,

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

で与えられている. この円盤の質量を求めよ. ただし, σ_0, σ_1 は定数である.

問 5 (体積積分)** 密度が一様な半球 $0 < z < \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ がある. この半球の重心の座標および z 軸まわりの慣性モーメントを求めよ.

- 1) 星 (*) 印の数は問題の難易度を表しています.
- 2) 毎週演習問題 (5 問程度) を配布するので, 次週までに解くこと.
- 3) 次週, そのうちの基本的な 1 問は小試験として指定の時間のうちに解く.
- 4) 残りの問題は, 当日あるいは次週に指名された, もしくは自ら志願した者が答案を板書し, 解説する. 自主的に発表した方が評価が高くなります.
- 5) 成績は, 期末試験 (100), 中間試験 (40), 小試験 (30), 発表 (30) の配点で評価します.
- 6) 試験中を除いて, 問題を解くに当たり, 質問, 他の学生との議論, 教科書, ノートを参考にしても良い. むしろ積極的な授業への参加を期待します. とまかく時間中に完全に理解し, 疑問を後に残さないよう勤めること!
- 7) 授業中は携帯電話を使用しないこと. スイッチをオフにするか, マナーモードにしておくこと.

(資料) 座標変換 $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ によって, 座標系 (x, y) から座標系 (u, v) に移るとき, 座標系 (x, y) での領域 D が座標系 (u, v) では D' に対応するとすれば,

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(f(u, v), g(u, v)) J(u, v) du dv$$

ここで $J(u, v)$ はヤコビアンあるいはヤコブの行列式と呼ばれ,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

例えば, 2次元デカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に座標変換するとき ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$),

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} g(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= \int_0^R g(r) 2\pi r dr \end{aligned}$$

が成り立つのを容易に示せる。(確かめよ! またこの関係の幾何学意味を考えてみよ.)

同様に 3次元空間における座標変換 $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ に対して,

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) J(u, v, w) du dv dw$$

であり, ここで $J(u, v, w)$ は

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

である. 3次元デカルト座標 (x, y, z) から極座標 (r, θ, ϕ) に座標変換 ($x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$) するとき,

$$\begin{aligned} \iiint_D h(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{D'} h(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz &= \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr. \end{aligned}$$

上の関係を幾何学的に説明せよ.