平成 18 年 7 月 20 日

期末テストは 7 月 27 日、理学部 E102 号室で行います.

電磁気学演習 No.14 (磁場のエネルギー、インダクタンス)

問 1 * **(磁場のエネルギー)** z 軸を中心軸とする無限に長い半径 a の円柱表面に表面電荷 σ が分布している. この円柱をその軸の周りに角速度 ω で回転させる. このとき,

(a) 電流密度 $\boldsymbol{J}$ を求めよ.

(b) 磁場 $\boldsymbol{B}$ を z 軸からの距離 R の関数として求めよ.

(c) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を R の関数として求めよ.

(d) z 軸に沿って単位長さあたりの領域に含まれる磁気エネルギー U_B を二つの表式, $U_B = \dfrac{1}{2\mu_0}\displaystyle\int B^2 dV$ および $U_B = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}dV$ に従って求め両者が一致することを確かめよ.

問 2 * **(円柱状導線)** 半径 a の無限に長い導線に電流 I(電流密度は一様であるとする) が流れている. 以下の問いに答えよ.

(a) この導線の作る磁場を導線の中心からの距離 R の関数として求め, その大きさをグラフにあらわせ.

(b) ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求め, その大きさを R の関数として図示せよ.

問 3 * **(同軸導体)** 半径 a と $b(> a)$ の無限に長く厚みがない導体管が同じ軸を中心軸として置かれている. 2 つの管に大きさが I で互いに逆向きの電流を軸方向に流す. このとき以下の問いに答えよ.

(a) 中心軸からの距離 R の関数として磁場を求め, 図示せよ.

(b) 軸方向単位長さ当りの磁場のエネルギー U を求めよ.

(c) このシステムは, 内管と外管が無限遠で互いに接続されていると考えると一つの回路を作っているとみなせる. 関係式 $U = \frac{1}{2}LI^2$ を使って, 単位長さ当りの自己インダクタンス L を求めよ.

(d) 2 つの管の間の磁束より自己インダクタンス L を求め, (c) で求めた答えと一致するかどうか調べよ.

問 4 (インダクタンス) 以下の回路に対するインダクタンス係数を求めよ.

(a)* 半径 a, 巻数 N_1 の大きい円形コイルの中心に, このコイルと同じ中心を持ち角度 θ だけ傾いた半径 $b(\ll a)$, 巻数 N_2 円形コイルがある. このときの相互インダクタンス.

(b)* 無限に長い直線導線とこの導線と同一面内にあり, これに接する半径 a の円形回路との間の相互インダクタンス.

(c)** 半径 a, 長さ l の直線導線が間隔 d で 2 本平行に置かれている. この導線の端を短絡して一つの回路を作る. 導線の表面にのみ電流が流れるとして自己インダクタンスを求めよ. ただし, $l \gg a$ とし, それぞれの導線を無限に長いみなして構わない.

静電場、静磁場の復習問題

問 1 ***(導体系)** 真空中に外半径 a、内半径 b の導体球殻があり, その中にこれと中心を同じくする半径 c の導体球がある $(a > b > c)$. 導体球, 導体球殻の電位を各々V_1, V_2 とし, $V_1 > V_2 > 0$ とするとき,

(a) ポアソン方程式を解くことにより, この系の静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を中心からの距離 r の関数として求め, 図示せよ. 極座標系 (r, θ, φ) で関数 f が r のみの関数であるとき $\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{df(r)}{dr})$ を用いてよい.

(b) この系の電場 $\boldsymbol{E}(r)$ を求め, 各導体の表面電荷の符号および電気力線の概形を図示せよ. また, 導体球および導体球殻上の電荷 Q_1 および Q_2 を求めよ.

(c) この系の静電エネルギーUをQ_1, Q_2, V_1, V_2を用いて表し, これが$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\boldsymbol{r})dV$ を用いて計算した結果と一致することを示せ.

(d) 導体球殻を接地し, この導体系をコンデンサーとみなすとき静電容量 C を求めよ.

問 2 ***(クーロンの法則)** 半径 a の円盤があり, 中心軸からの距離を R とするとするとき, この円盤上に面密度 $\sigma(R) = \sigma_0 R^2$ で電荷が分布している. このとき円盤の中心軸上での静電ポテンシャル Φ および電場 $\boldsymbol{E}$ を中心からの距離 z の関数として求め, それらの概形を描け.

問 3 ***(ガウスの法則)** 外半径 a、内半径 b の球殻に電荷密度 ρ の一様な電荷が分布している. このとき電場 $\boldsymbol{E}$ および静電ポテンシャル Φ を中心からの距離 r の関数として求め. それを図示せよ. また, この系のポアソン方程式を解くことにより $\Phi(r)$ を求め結果が一致することを確かめよ.

問 4 ***(アンペールの法則)** z 軸を中心とする半径 a の無限に長い円柱状導線に一様な電流が流れている. 電流の総量を I とするとき, この電流が導線の内部および外部に作る磁場 $\boldsymbol{B}$ を求め, 中心軸からの距離 R の関数として図示せよ.

問 5 ****(ビオ・サバールの法則)** 半径 a の円盤に一様な面電荷密度 σ で電荷が分布している. この円盤を中心軸まわりに角速度 ω で回転させるとき, 中心軸上での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を中心からの距離 z の関数として求めよ.