平成 18 年 5 月 11 日

電磁気学演習 No.4 (静電場と静電ポテンシャル)

問 1 ***(ベクトル解析)** $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるとき以下を計算せよ.

(a) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$

(b) $\nabla f(r)$

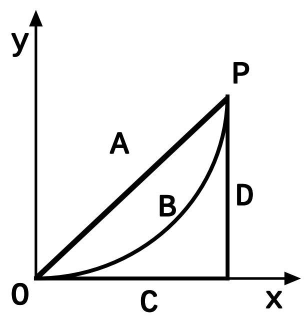
(c) $\nabla \times (\boldsymbol{r} f(r))$

(d) $\nabla^2 f(r)$

問 2 ***(保存力とポテンシャル)** 2 次元空間で定義された力 $\boldsymbol{F} = (2xy, \alpha x^2)$ (α は定数) に対して,

(a) 右図に示すような 3 つの経路, すなわち直線 O→A→P, 円弧 O→B→P ($y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$), 折れ線 O→C→D →P, を通って質点が点 O$(0,0)$ から点 P(a,a) に移動するときの仕事をそれぞれの経路について求めよ.

(b) α がいかなる値のとき, 力 $\boldsymbol{F}$ は保存力か？ また、そのときのポテンシャルを求めよ.



問 3 (電気双極子) 点電荷 $-q$ が原点にあり, 点電荷 q が位置ベクトル $\boldsymbol{d}$ にある.

(a)* この 2 つの点電荷が作る静電ポテンシャルと電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ. また, 2 つの点電荷を含む平面上での等電位面および電気力線の概形を図示せよ.

(b)** この 2 つの点電荷の距離に比べて遠く離れた任意の点 $\boldsymbol{r}$ ($d \ll r$) におけるポテンシャルが以下で与えられることを示せ.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}$$

(c)* 上のポテンシャルより, 電場が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{d}}{r^3}\right)$$

となることを示せ.

問 4 (2 枚の平行円盤) z 軸を中心とし, z 軸と垂直な半径 R の 2 枚の円盤がある. 一方の中心は $z = a/2$ の位置にあり, その電荷密度は一様で σ, もう一方の中心は $z = -a/2$ で電荷密度は $-\sigma$ である.

(a)* z 軸上での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(b)* $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

(c) ** $R \to \infty$ でこの 2 つの円盤は電荷密度 $\pm\sigma$ の 2 枚の平行な広さ無限大の平面になる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それを図示せよ.

問 5 ** **(球殻状電荷)** 原点をその中心とする半径 R の球殻がある. この球殻上に面密度 σ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上の点 $(r, 0, 0)$ での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.