ガイダンス

担当教員: 田中　新 (居室: 先端研 307W, atanaka@hiroshima-u.ac.jp)

ティーチングアシスタント (TA): M1 小林直義

目的: 演習問題を解くことにより、電磁気学 I の授業内容の理解を深める.

授業進行:

14:35
小試験 (15 分程度、答案用紙として A4 のレポート用紙を持参のこと）

14:50
小試験の問題の解説.
演習問題を解く. (毎週 5 問程度を配布するので次週までに解く. ともかく自分で納得するまでじっくり考えること. 問題を解くにあたって教員への質問、他の学生との議論、教科書・ノートを参考にしても良い. ）

16:30〜
自ら志願あるいは指名された学生による, 演習問題の解答の板書とその解説. （最低 2 回は発表すること. ）

成績評価: 成績は, 期末試験 (100), 中間試験 (40), 小試験 (30), 発表 (30) の配点で評価します.

ホームページ: http://home.hiroshima-u.ac.jp/atanaka/EM/EM.html

その他: 飲食物の持ち込みは禁止. 授業時間中は携帯電話の電源を切ること.

平成 19 年 4 月 12 日

電磁気学演習 No.1 (ベクトル、多重積分の復習)

問 1 (ベクトル)* 以下のベクトル関係式を証明せよ.

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

問 2 (ベクトル)** ベクトル $\boldsymbol{B}$ をベクトル $\boldsymbol{A}$ に平行なベクトルと垂直なベクトルの和で書き表わすと以下のようになることを示せ.

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{A^2}\boldsymbol{A} + \frac{(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{A}}{A^2}$$

問 3 (線積分)* 長さ L の棒がある. この棒の線密度 (すなわち, 単位長さ当たりの質量)λ は棒の片端からの距離 x の関数として,

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 (x/L)^2$$

で与えられている. この棒の質量を求めよ. ただし, λ_0, λ_1 は定数である.

問 4 (面積分)* 半径 R の薄い円盤がある. この円盤の面密度（すなわち, 単位面積当たりの質量）σ は円盤の中心からの距離 r の関数として,

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

で与えられている. この円盤の質量を求めよ。ただし, σ_0, σ_1 は定数である.

問 5 (体積積分)** 密度が一様な半球 $0 < z < \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ がある。この半球の重心の座標および z 軸まわりの慣性モーメントを求めよ.

星 (*) 印の数は問題の難易度を表しています.

(資料) 座標変換 $x = f(u,v),\ y = g(u,v)$ によって, 座標系 (x,y) から座標系 (u,v) に移るとき, 座標系 (x,y) での領域 D が座標系 (u,v) では D' に対応するとすれば,

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F\left(f(u,v),\ g(u,v)\right)\ J(u,v)\,du\,dv$$

ここで $J(u,v)$ はヤコビアンあるいはヤコブの行列式と呼ばれ,

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

例えば, 2 次元デカルト座標 (x,y) から極座標 (r,θ) に座標変換するとき ($x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$),

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr\,d\theta$$
$$\iint_{x^2+y^2\le R^2} g(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int_0^R g(r)\,2\pi r\,dr$$

が成り立つのを容易に示せる. (確かめよ！またこの関係の幾何学意味を考えてみよ.)

同様に 3 次元空間における座標変換 $x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w)$ に対して,

$$\iint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} F\left(f(u,v,w),\ g(u,v,w),\ h(u,v,w)\right)\ J(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

であり, ここで $J(u,v,w)$ は

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

である. 3 次元デカルト座標 (x,y,z) から極座標 (r,θ,ϕ) に座標変換 ($x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$) するとき,

$$\iiint_D h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} h(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \rho(r)\,4\pi r^2\,dr\ .$$

上の関係を幾何学的に説明せよ.