

問 1 * (直線電流の作る磁場) 無限に長い直線導線に電流 I が流れているとき、導線の周りに作られる磁場 B を導線からの距離 r の関数として求め、その大きさと r の関係を図示せよ。

問 2 * (円柱電流)

- (a) その軸が z 軸上にある半径 R の無限に長い直線ケーブルに一樣電流が流れている。電流の総量を I とするとき、この電流がケーブルの内部および外部に作る磁場 B を求め、その大きさを中心軸からの距離 r の関数として図示せよ。
- (b) 上の問題と同様であるが、ケーブル内の電流が一樣でなく電流密度 $\mathbf{J} = J_z(r)\mathbf{e}_z$ が

$$J_z(r) = \begin{cases} \frac{3I}{\pi R^3}(R-r) & (0 < r < R) \\ 0 & (R < r) \end{cases}$$

で与えられるとき、磁場 B を求め、その大きさを r の関数として図示せよ。

問 3 * (二枚の板状電流) 無限に広い二枚の板状導体板が平行に置かれており、単位幅当り I の電流が互いに平行で反対方向に流れている。このとき、この導体板の電流が作る磁場の大きさと向きは二枚の導体に挟まれた領域およびその外でどうなるか?

問 4 * (板状電流) x - y 平面をその中心とする厚さ $2h$ の無限平板があり、その平板中を電流密度 J_0 の一樣な電流が x 軸方向に流れているとする。このときこの電流が作る磁場を求め、その大きさを z の関数として図示せよ。

問 5 * (回転円柱) 一樣な電荷密度 ρ で帯電した半径 a 、長さ無限大の円柱がその中心軸まわりに角速度 ω で回転している。このとき、この円柱の作る磁場を中心軸からの距離 r の関数として求め、それを図示せよ。

電流、磁場が時間変化しないとき、以下の法則が成り立つ。

アンペールの法則 (積分型)

任意の閉曲線 C を縁とする曲面を通過する電流 I と、この閉曲線に沿った磁場 $B(\mathbf{r})$ に対する線積分の間には、以下の関係がある (ただし、電流は積分の周回方向に対して右ねじの方向を正とする):

$$\int_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

なお、静電場の場合は、電場と電荷の間に以下の関係があった。

ガウスの法則 (積分型)

任意の閉曲面 S で囲まれた領域にある電荷 Q と、この閉曲面上の $E(\mathbf{r})$ に対する面積分には、以下の関係がある (ただし、面の法線ベクトルは領域の外側を向いているとする):

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0.$$

アンペールの法則 (微分型)

電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の間には次の関係がある (ストークスの定理を用いてこれが左の“積分型”アンペールの法則と等価であることを確かめよ!):

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

ガウスの法則 (微分型)

電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ と電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の間には次の関係がある (ガウスの定理を用いてこれが左の“積分型”ガウスの法則と等価であることを確かめよ!):

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0.$$

【レポート問題】 (A4のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること。小試験後に回収。)

問1 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし, α を定数とするとき以下を計算せよ.

- (a) $\nabla \frac{e^{-\alpha r}}{r}$
- (b) $\nabla \times \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
- (c) $\nabla^2 e^{-\alpha r^2}$

問2 z 軸を中心軸とし, $x-y$ 平面上にある半径 a の円盤上にその中心からの距離を R とするとき面密度 $\sigma = \sigma_0 R^2$ の正電荷が分布している. このとき, 以下の問に答えよ.

- (a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.
- (b) z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

問3 真空中に半径 a の球があり, この球に正電荷が電荷密度 ρ で一様に分布している.

- (a) ガウスの法則を用いて電場 E を求め, その大きさを中心からの距離 r の関数として図示せよ.
- (b) この球を中心を共有し半径 b の きゅうかく 球殻 おお で覆ったところ球殻の外では電場が完全にゼロとなった. この球殻の面電荷密度 σ を求めよ. ただし球殻の厚さは無視してよいとする.
- (c) この球と球殻からなる系の静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ. ただし, 静電ポテンシャルは無限遠でゼロとする.
- (d) この系の静電エネルギーを求めよ.

問4 真空中に中心軸を共有する半径 a, b, c の無限に長い3つの導体 えんどう 円筒がある ($c > b > a$). 内側と外側の円筒は接地され, 静電ポテンシャルはゼロであり, 半径 b の円筒の静電ポテンシャルを $V > 0$ とする. これらの円筒の厚さはその半径に比べ十分薄いとする. また, 中心軸からの距離 R が大きい極限 ($R \rightarrow \infty$) で静電ポテンシャルはゼロとする.

- (a) 中心軸からの距離を R とするとき, 静電ポテンシャル $\Phi(R)$ を求めよ. なお, 円柱座標系 (R, ϕ, z) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを用いてよい.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- (b) 電場 $E(R)$ を求め, R の関数として図示せよ.
- (c) 軸方向単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ.