【小試験】

真空中に中心を共有する半径 a と半径 b の球殻がある $(b > a)$. 内側の球殻の静電ポテンシャルを $V(> 0)$, 外側の球殻の静電ポテンシャルをゼロとする. これらの球殻の厚さはその半径に比べ十分薄いとする. また, $r \to \infty$ で静電ポテンシャルはゼロとする.

(a) 中心からの距離を r とするとき, 静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ. なお, 極座標系 (r, θ, ϕ) でラプラシアン (∇^2) の表式が, 以下のようになることを用いてよい.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

(b) 電場 $\boldsymbol{E}(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(c) 半径 a の球殻外側表面の面電荷密度 $\sigma^a_{\rm out}$, 半径 b の球殻内側の面電荷密度 $\sigma^b_{\rm in}$ を求めよ.

(d) この系をコンデンサーとみなすとき静電容量 C を求めよ.

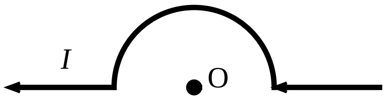
(e) この系の静電エネルギーを求めよ.

【演習問題】

問 1 ***(円形電流)** 原点を中心とし, x-y 平面上に置かれている半径 a の円形導線に電流 I が流れている. z 軸上の磁場を座標 z の関数として求め, その大きさを z 関数として図示せよ.

問 2 ***(正方形電流)** 一辺 $2a$ の正方形導線に電流 I が流れている. その中心での磁場の大きさと方向を求めよ.

問 3 ***(円弧(えんこ) 電流)** 半径 a の半円型導線を図のように直線導線につなぎ, 電流 I を流すとき, 中心 O における磁場の大きさと向きを求めよ.



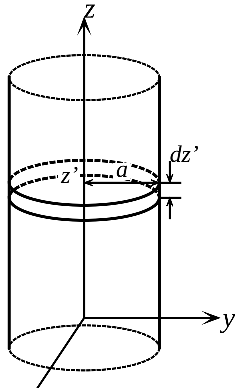
問 4 ***(ソレノイド)** z 軸を中心軸とする無限に長い半径 a の円柱がある. この円柱の表面には表面電荷密度 σ で一様に電荷が分布している. この円柱を z 軸を回転軸として角速度 ω で回転させた. 以下の問いに答えよ.

(a) 円柱を z 方向に微小な長さ dz' をもつ円環に分けて考える. この円環に流れる電流 dI を求めよ.

(b) z 座標が z' の位置にある円環上を流れる電流が原点に作る磁場を求めよ.

(c) 円柱表面に流れる全ての電流が原点に作る磁場を求めよ.

(d) z 軸上全ての点の磁場は原点の磁場と等しい. なぜか? その理由を考えよ.



問 5 ****(回転球)** 半径 a の非導体球が電荷密度 ρ で一様に帯電している. ある直径の回りに一定角速度 ω でこの球を回転させるとき, 球の中心の磁場を求めよ.

【補足】

ビオ・サバールの法則

電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ の定常電流が作る磁束(じそく)密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は、以下のようになる:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\, dV'.$$

導線に定常電流 I が流れている場合, この導線が作る磁束密度は, この導線に沿った以下の線積分で与えられる (この関係を上の式から導け！):

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{l}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.$$

なお, ビオ・サバールの法則に対応して静電場では, 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の間に, 以下のガウスの法則があった:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\, dV'.$$