期末テストは 7 月 26 日、理学部 E102 号室で行います.

電磁気学演習 No.12 (定常電流間に働く力、ベクトルポテンシャル) 平成 19 年 7 月 5 日

【小試験】

無限に長い直線導線に電流 I が流れているとき, 導線の周りに作られる 磁束(じそく) 密度 $\boldsymbol{B}$ を導線からの距離 r の関数として求め, その大きさと r の関係を図示せよ.

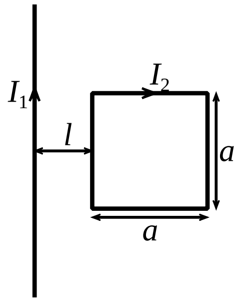
【演習問題】

問 1 ***(直線電流による力)** z 軸と平行で点 $(a/2, 0, 0)$ 及び $(-a/2, 0, 0)$ を通る無限に長い 2 本の直線導線がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(a) 両方に同じ方向の電流 I が流れているとき, x-z 平面上の磁場の y 成分, $H_y(x)$ を x の関数としてグラフにあらわせ. また, 磁力線の 概形(がいけい) も描け. さらに, 同じことを一方の導線の電流の向きを逆にした場合についても行え.

(b) 両方に同じ方向の電流 I が流れている場合, この導線の単位長さ当りにかかる力とその向きを求めよ. また、一方の導線の電流の向きを逆にした場合はどうか？

問 2 ***(直線, 正方形電流間の力)** 右図に示すように, 無限に長い直線導線と正方形導線が同一平面内にあり, それぞれに電流 I_1, I_2 が流れている. 正方形導線の一辺の長さを a, 直線導線と一番近い辺との距離を l とするとき, この 2 つの導線の間に働く力を求めよ.



問 3 ***(二つの円形コイルによる磁場)** 半径 a の 2 つの円形コイルを距離 d 隔(へだ)てて互いに中心軸が一致するように配置して, 電流 I を同じ向きに流すとき,

(a) 2 つのコイルの中心を結ぶ線分上にあり, この線分の中点からの距離が x である点での磁束密度を求めよ.

(b) コイルの中心を結ぶ線分上の中点 近傍(きんぼう)$(x << a, d)$ で, 磁束密度がほとんど変化しないようにするには $a = d$ とすれば良いことを示せ.

問 4 ***(ベクトルポテンシャル)** 次のベクトルポテンシャルに対する磁束密度を求めよ. ただし, c は定数, $\boldsymbol{c}$ は定数ベクトル, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを表す.

(a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$

(b) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = c\boldsymbol{r}$

(c) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}/r^3$ (ただし, $r \neq 0$)

問 5 ****(直線電流のベクトルポテンシャル)** z 軸に沿って無限に長い直線導線があり, 電流 I がこの導線に流れているとする. このときベクトルポテンシャルが

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\ln r)\boldsymbol{e}_z$$

と書けることを示し, これを用いて磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ. ここで r は z 軸からの距離, $\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである.

【補足】

2 つの導線の間に働く力

2 つの導線 l_1 と l_2 があり, それぞれに電流 I_1, I_2 が流れているとする. このとき導線 l_1 の作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は, ビオ・サバールの法則により,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}.$$

となる. 導線 l_2 の上の微小な部分 $d\boldsymbol{l}_2$ に働くローレンツ力 $d\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ について考える. この導線の電荷密度を ρ, 断面積を S, $d\boldsymbol{l}_2$ 方向の単位ベクトルを $d\hat{\boldsymbol{l}}_2$ とすると, $q = \rho S dl_2$, $I_2 d\hat{\boldsymbol{l}}_2 = \rho S \boldsymbol{v}$ の関係にあるので, $q\boldsymbol{v} = I_2 d\boldsymbol{l}_2$ となる. よって,

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2) = I_2\, d\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B(r_2)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{l}_2 \times [d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}.$$

ゆえに, 導線 l_2 全体に働く力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は,

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int\int \frac{d\boldsymbol{l}_2 \times [d\boldsymbol{l}_1 \times (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}.$$

次に, l_1 と l_2 が無限に長い互いに平行な直線導線である場合について考える. 2 つの導線は距離 d だけ離れており, 簡単のため, 導線 l_1 が z 軸上にあるとする. 円柱座標 $(R,\ \theta,\ z)$ を用いると, 導線 l_1 の作る磁束密度は $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\theta$ と表される. よって, 単位長さあたり, 導線 l_2 に働く力は,

$$\boldsymbol{F}_{21} = I_2 \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{B(r_2)} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\boldsymbol{e}_R$$

となる. 従って, 導線間には 2 つの導線を含む平面上で導線と垂直な方向の力が働き, 電流の向きが同方向の場合は引力で, 向きが互いに逆方向の場合は 斥力(せきりょく) となることがわかる.