電磁気学演習 No.2 (クーロンの法則) 平成 19 年 4 月 19 日

【小試験】

半径 R の薄い円盤がある. この円盤の面密度（すなわち, 単位面積当たりの質量）σ は円盤の中心からの距離 r の関数として,

$$\sigma(r) = \sigma_0\sqrt{r^2+a^2}$$

で与えられている. この円盤の質量を求めよ. ただし, σ_0, a は正の定数である.

【演習問題】

問 1* x 軸上の点 $\boldsymbol{r}_1 = (a,0,0)$ および $\boldsymbol{r}_2 = (-a,0,0)$ に点電荷 q があるとする. このとき以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上の電場 $\boldsymbol{E}$ をクーロンの法則より求めよ.

(b) z 軸上で電場の大きさが最大になる位置を求めよ. また, z 軸上での電場の z 成分を z の関数として図示せよ.

(c) x 軸を含む平面における電気力線の大まかな形状を図示せよ. また, $\boldsymbol{r}_2 = (-a,0,0)$ の電荷を $-q$ にした場合はどうか?

問 2* x 軸上の 3 点に点電荷 q_{A}, q_{B} 及び q_{C} が置かれている. 点電荷 q_{A} の位置を原点とし, q_{B} 及び q_{C} の x 座標を x_{B} 及び x_{C} とする. ただし, q_{C} は q_{A} と q_{B} をつなぐ線分上にある. すなわち, $0 < x_{\mathrm{C}} < x_{\mathrm{B}}$ である. 以下の問いに答えよ.

(a) 3 つの点電荷全てに力が働かない平衡状態を実現するためには, 3 つの電荷の比をどのように決めるべきか?

(b) 点電荷 q_{C} が q_{A} と q_{B} をつなぐ線分の中点にある場合, 平衡状態を実現するためには, 3 つの電荷の比をどのように決めるべきかを考えよ. さらに, このときの電気力線の形状を図示せよ.

問 3***(円環状電荷)** z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 a の円周上に線電荷密度 λ の電荷が一様に分布している. このとき, 以下の問に答えよ.

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求め, z の関数として図示せよ.

(b) z 軸上で電場の大きさが最大となる点を求め, その点における電場の大きさを求めよ.

問 4 (円盤状電荷) z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ で電荷が一様に分布している. このとき以下の問いに答えよ.

(a)* z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.

(b)* z 軸上における電場の z 成分 E_z を z の関数として図示せよ. さらに, z 軸上で電場の大きさが最大となる点を求め, その点における電場の大きさを求めよ.

(c)** $R \to \infty$ とすると, 円盤は無限に広い平面となる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

問 5 ** **(線分状電荷)** 一様な線密度 λ の電荷が z 軸上の $-a < z < a$ の範囲の線分上に分布している. 以下の問いに答えよ.

(a) 円柱座標上の点 (r, ϕ, z) における電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\alpha - \sin\beta) \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\beta - \cos\alpha) \end{aligned}$$

となることをクーロンの法則から求めよ. ただし,

$$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}},$$
$$\sin\alpha = \frac{z+a}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}}$$

である.

(b) $a \to \infty$ とするとき, 電荷は無限に長い直線上に分布する. このとき作られる電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ.