電磁気学演習 No.3 (積分型ガウスの法則) 平成 19 年 4 月 26 日

【小試験】

z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ で電荷が一様に分布している. このとき以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.

(b) z 軸上における電場の z 成分 E_z を z の関数として図示せよ. さらに, z 軸上で電場の大きさが最大となる点を求め, その点における電場の大きさを求めよ.

(c) $R \to \infty$ とすると, 円盤は無限に広い平面となる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

【演習問題】

問 1 ***(ガウスの定理)** ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ に対して, x-, y-および z-軸を 3 辺とする一辺の長さ a の立方体の内部に対する積分 $\iiint \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$ とその表面に対する積分 $\iint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を実行し, ガウスの定理が成り立っていることを確かめよ

問 2 ***(ガウスの法則: 球)** 真空中に半径 a の球があり、その内部に電荷密度 ρ(一定) の電荷が一様に分布している. このとき、

(a) 系の対称性から電場はどのような形で表されるか？ その方向と極座標 (r, θ, φ) で表したときの r, θ, φ 依存性について述べよ.

(b) ガウスの法則を用いて、この球状電荷によって作られる電場を求めよ。

(c) この系の電場を原点からの距離 r の関数として図示せよ.

問 3 ***(ガウスの法則: 球面状電荷)** 半径 a の球面上に電荷が面電荷密度 σ (一定) で一様に分布しているとき, 電場を原点からの距離 r の関数として求め, 図示せよ. さらに, この球内に質量 m, 電荷 $-e$ の電子がある場合, 電子はどのような運動をするか考えよ.

問 4 * **(ガウスの法則: 無限円柱)** 半径 a の無限に長い円柱の内部のみに電荷密度 ρ(一定) の電荷が分布している. このときの電場を, ガウスの法則を使い円柱の中心軸からの距離の関数として求め, 図示せよ.

問 5 ** **(ガウスの法則: 無限平板電荷)** 電荷密度が座標 z のみの関数として

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & (|z| \le z_0) \\ 0 & (|z| > z_0) \end{cases}$$

のように与えられている. (すなわち, 厚み $2z_0$ の無限に広い電荷平板がある.) この電荷の作る電場をガウスの法則を用いて求め, z の関数として図示せよ. さらに, 質量 m, 電荷 $-e$ の電子をこの平板の中心から平板に垂直に投げ出すとする. 電子が平板の外に出るためには投げ出す速度 v はどれほどでなければならないか? ただし, $\rho_0 > 0$ として考えよ.

(資料)

(A) 3 次元デカルト座標系で $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x-, y-, z-軸方向の単位ベクトルとすると, スカラー場 $f(x,y,z)$ の勾配 (gradient), ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転 (rotation) および発散 (divergence) は以下のように定義される.

i) **勾配:** $\nabla f = \mathrm{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$

ii) **回転:**
$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\boldsymbol{k}$$

iii) **発散:** $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

(B) i) g, f をスカラー場, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ をベクトル場とすると以下の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\nabla(fg) = f\nabla g + (\nabla f)g \\
&\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})f \\
&\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f)\times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A})f \\
&\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&\nabla \times (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \\
&\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&\nabla \times (\nabla f) = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad} f = 0 \\
&\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0 \\
&\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

ii) **ガウスの定理:** V を任意の領域, S をその表面とすると,

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dV$$

iii) **ストークスの定理:** S を任意の曲面, C をその周とすると,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$

(C) 勾配, 回転, 発散は次のように定義することもできる.

i) **勾配:** $\Delta\boldsymbol{r}$ を微小変位, $\boldsymbol{l}$ を変位の方向の単位ベクトルとすると,

$$(\nabla f)\cdot\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r})\right\}.$$

ある点 $\boldsymbol{r}$ での勾配は, その点での f の単位長さ当たりの変化が最大となる方向を向いており, その絶対値はその方向での単位長さ当たりの f の値の変化を与えている. 勾配の方向は常に $f =$ 一定の面に対して垂直.

ii) **回転:** $\boldsymbol{n}$ を微小な面の単位法線ベクトル, ΔS をその面積, ΔC をその周とすると,

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで, $\oint$ は閉じた曲線に対する線積分を表し, $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{A}$ の C に沿った循環あるいは渦量という. 保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の場合は循環がいかなる閉曲線に対してもゼロであるから, $\nabla \times \boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$が常に成り立つ.

iii) **発散:** ΔV を微小領域の体積, ΔS をその表面とすると, 発散は,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

$\boldsymbol{A}$ を流体の速度場とみなせば, 右辺の積分は単位時間当りの微小領域表面 ΔS から流れ出す流体の体積に対応している.

(D) [1]直交曲線座標系を (u_1, u_2, u_3) とすると, 第一基本量 g_i とは座標 u_i を微小量 δu_i 変化させた時, u_i 方向への位置ベクトルの移動距離 δs_i が, $\delta s_i = g_i \delta u_i$ と書ける量である. 例えば, 座標点 (u_1, u_2, u_3) と座標点 $(u_1 + \delta u_1, u_2, u_3)$ の間の距離は $g_1 \delta u_1$ である. 第一基本量は, 以下の式から計算できる:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}.$$

$\boldsymbol{e}_i$ を座標 u_i 方向の単位ベクトル, A_i をベクトル $\boldsymbol{A}$ の u_i 方向の成分とすると,

i) **微小距離:** $ds = \sqrt{(g_1 du_1)^2 + (g_2 du_2)^2 + (g_3 du_3)^2}$

ii) **体積要素:** $dV = g_1 g_2 g_3 \, du_1 du_2 du_3$

iii) **勾配:** $\nabla f = \dfrac{1}{g_1} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{1}{g_2} \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{g_3} \dfrac{\partial f}{\partial u_3} \boldsymbol{e}_3$

iv) **回転:** $\nabla \times \boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1 g_2 g_3} \begin{vmatrix} g_1 \boldsymbol{e}_1 & g_2 \boldsymbol{e}_2 & g_3 \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 A_1 & g_2 A_2 & g_3 A_3 \end{vmatrix}$

v) **発散:** $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\dfrac{\partial g_2 g_3 A_1}{\partial u_1} + \dfrac{\partial g_3 g_1 A_2}{\partial u_2} + \dfrac{\partial g_1 g_2 A_3}{\partial u_3} \right)$

[1]「物理応用数学演習」(共立出版) **2.3** 章を参照