

【小試験】

真空中に半径 a の球があり、その内部に電荷密度 ρ (一定) の電荷が一様に分布している。このとき、

- (a) 系の対称性から電場はどのような形で表されるか？ その方向と極座標 (r, θ, φ) で表したときの r, θ, φ 依存性について述べよ。
- (b) ガウスの法則を用いて、この球状電荷によって作られる電場を求めよ。
- (c) この系の電場を原点からの距離 r の関数として図示せよ。

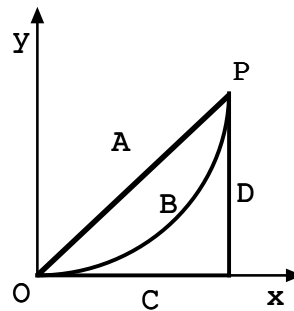
【演習問題】

問 1 * (ベクトル解析) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるとき以下を計算せよ。

- (a) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$
- (b) $\nabla f(r)$
- (c) $\nabla \times (\mathbf{r}f(r))$
- (d) $\nabla^2 f(r)$

問 2 * (保存力とポテンシャル) 2次元空間で定義された力 $\mathbf{F} = (2xy, \alpha x^2)$ (α は定数) に対して、

- (a) 右図に示すような3つの経路、すなわち直線 $O \rightarrow A \rightarrow P$, 円弧 $O \rightarrow B \rightarrow P$ ($y = a - \sqrt{a^2 - x^2}$), 折れ線 $O \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow P$, を通って質点が点 $O(0, 0)$ から点 $P(a, a)$ に移動するときの仕事それぞれの経路について求めよ。
- (b) α がいかなる値のとき、力 \mathbf{F} は保存力か？ また、そのときのポテンシャルを求めよ。



問 3 (電気双極子) 点電荷 $-q$ が原点にあり、点電荷 q が位置ベクトル \mathbf{d} にある。

- (a) * この2つの点電荷が作る静電ポテンシャルと電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を求めよ。また、2つの点電荷を含む平面上での等電位面および電気力線の概形を図示せよ。
- (b) ** この2つの点電荷の距離に比べて遠く離れた任意の点 \mathbf{r} ($d \ll r$) におけるポテンシャルが以下で与えられることを示せ。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}$$

- (c) * 上のポテンシャルより、電場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3} \right)$$

となることを示せ。

問 4** (ガウスの法則) 静電ポテンシャルが原点からの距離 r の関数として、以下のように与えられているとする。

$$\Phi(r) = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

- (a) 電場 E を求めよ。
- (b) 電荷密度 $\rho(r)$ ($r \neq 0$) を微分型ガウスの法則を用いて求めよ。
- (c) 原点に存在する点電荷の電荷を積分型ガウスの法則を用いて求めよ。(ヒント: 原点を中心とする微小な半径の球を考え、これに積分型ガウスの法則を適用し、半径無限小の極限を考えよ。)
- (d) この系の全電荷を求めよ。

問 5* (クーロンの法則) 中心軸が z 軸上にある高さ h , 半径 a の円筒に一樣な面電荷密度 σ で電荷が分布している。この円筒の中心が原点にあるとして、以下の問いに答えよ。

- (a) この円筒上で z 座標が $z' < z < z' + \Delta z'$ であるような円環状領域にある電荷が z 軸上の点 $(0, 0, z)$ に作る電場 ΔE が以下のようなことになることを示せ。ただし、 $\Delta z'$ は十分小さいとする。

$$\Delta E(z) = \frac{a\sigma}{2\epsilon_0} \frac{(z - z')\Delta z'}{\{a^2 + (z - z')^2\}^{3/2}} e_z$$

- (b) この円筒上の電荷が z 軸上に作る電場を z の関数として求め、それを図示せよ。