電磁気学演習 No.5 (静電ポテンシャル) 平成 19 年 5 月 17 日

【小試験】

電荷密度が座標 z のみの関数として

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & (|z| \leq z_0) \\ 0 & (|z| > z_0) \end{cases}$$

のように与えられている. (すなわち, 厚み $2z_0$ の無限に広い電荷平板がある.) この電荷の作る電場をガウスの法則を用いて求め, z の関数として図示せよ. さらに, 質量 m, 電荷 $-e$ の電子をこの平板の中心から平板に垂直に投げ出すとする. 電子が平板の外に出るためには投げ出す速度 v はどれほどでなければならないか? ただし, $\rho_0 > 0$ として考えよ.

【演習問題】

問 1 ***(ベクトル解析)** 次の等式を証明せよ.

(a) $\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})f$

(b) $\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{A} + (\nabla \times \boldsymbol{A})f$

(c) $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$

問 2 ****(ストークスの定理)** ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ に対して, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ なる半球の表面に対する積分 $\iint(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ とその周である x-y 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ に対する積分 $\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算し, ストークスの定理が成り立っていることを確かめよ.

問 3 ***(静電ポテンシャル)** 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が以下の場合に, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を線積分することにより, その静電ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ.

(a) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2xye^z\boldsymbol{i} + x^2e^z\boldsymbol{j} + x^2ye^z\boldsymbol{k}$

(b) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} & (r > a) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} & (r \leq a) \end{cases}$

(c) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$

問 4 (2 枚の平行円盤) z 軸を中心とし, z 軸と垂直な半径 R の 2 枚の円盤がある. 一方の中心は $z = a/2$ の位置にあり, その電荷密度は一様で σ, もう一方の中心は $z = -a/2$ で電荷密度は $-\sigma$ である.

(a) * z 軸上での静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(b) * $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

(c) ** $R \to \infty$ でこの 2 つの円盤は電荷密度 $\pm\sigma$ の 2 枚の平行な広さ無限大の平面になる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, それを図示せよ.

問 5 ** **(球殻状電荷)** 原点をその中心とする半径 a の球殻がある. この球殻上に面密度 σ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a) 静電ポテンシャルの重ね合わせの法則を用いて z 軸上の点 $(r, 0, 0)$ での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

問 6 *** **(球状電荷)** 原点をその中心とする半径 a の球がある. この球の内部に電荷密度 ρ の一様な電荷が分布しているとする. 極座標 (r, θ, ϕ) を用いて以下の問いに答えよ.

(a) 静電ポテンシャルの重ね合わせの法則を用いて z 軸上の点 $(r, 0, 0)$ での静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ より, 電場の r 成分 $E_r(r)$ を求め, r の関数として図示せよ.