電磁気学演習 No.8 (導体系の復習、電気回路) 平成 19 年 6 月 7 日

【小試験】

z 軸を中心軸とし, x-y 平面上にある半径 R の円盤上に面密度 σ で電荷が一様に分布している. このとき以下の問いに答えよ.

(a) z 軸上における電場の z 成分 $E_z(z)$ をクーロンの法則から求めよ.

(b) z 軸上における静電ポテンシャル $\Phi(z)$ を求めよ.

(c) $R \to \infty$ とすると, 円盤は無限に広い平面となる. このときの電場の z 成分 $E_z(z)$ を求め, z の関数として図示せよ.

【演習問題】

問 1 * **(コンデンサーの静電容量)** いくつかの導体系の静電容量 C が以下のように与えられることを示せ.

(a) 孤立した半径 a の導体球 (ただし, 無限遠に対してコンデンサーを作ると考えよ)

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

(b) 面積 S, 間隔 d の平行平板コンデンサーで一方の極を絶縁し, 他方を接地した場合

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(c) 内半径 a, 外半径 b の同心球からなるコンデンサーで, 外球を接地した場合

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

(d) 内半径 a, 外半径 b の同心球からなるコンデンサーで, 内球を接地した場合

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{b^2}{b-a}$$

(e) 内半径 a, 外半径 b の同軸円筒からなるコンデンサーで, 外筒を接地した場合（軸方向単位長さあたり）

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(b/a)}$$

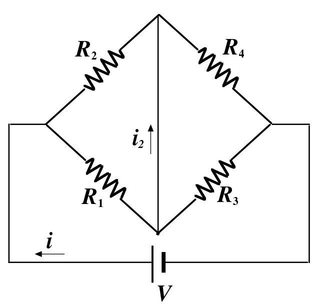
(f) 半径 a, 間隔 d（ただし, $a << d$）の 2 本の十分長い平行導線（軸方向単位長さあたり）

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\log(d/a)}$$

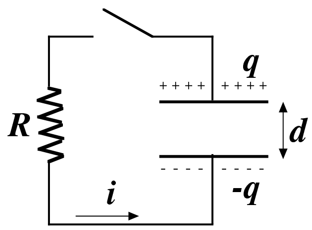
問 2 ***(Wheatstone ブリッジ)** 図のように 4 個の抵抗, R_1, R_2, R_3, R_4 と電圧 V の直流電源がつながれた回路がある. このとき,

(a) Kirchhoff（キルヒホッフ）の法則をもちいて, 電流 i および i_2 を求めよ.

(b) i_2 がゼロであるためには 4 個の抵抗の間にどのような関係が成り立たなければならないか？



問 3 *(**RC 回路**) 図のような, 互いに平行で距離 d だけ離れた面積 S の 2 つの導体平板からなるコンデンサー, 抵抗 R, スイッチが直列につながれた電気回路がある. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 2 つの導体平板に対し d は十分小さく, コンデンサー内の電場が一様であると仮定して良いとする.



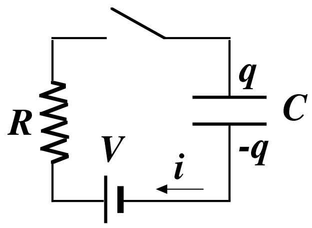
(a) このコンデンサーの静電容量を求めよ.

(b) 最初, 回路のスイッチが開いており, コンデンサーには電荷 q_0 が蓄えられていた. このときの静電エネルギーを求めよ.

(c) 時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じた, キルヒホッフの法則を用いて, コンデンサーの電荷 $q(t)$ の満たすべき時間に対する微分方程式をたて, 初期条件 $q(0) = q_0$ のもとでこの微分方程式を解き, $q(t)$ および回路に流れる電流 $i(t)$ を時間の関数として図示せよ.

(d) 時刻 $t = 0$ から $t = \infty$ の間に抵抗 R によって消費されるエネルギーを求めよ.

問 4 *(**RC 回路**) 図のような抵抗 R, スイッチ, 静電容量 C のコンデンサー, 電圧 V の直流電源が直列につながれた電気回路がある. このとき, 以下の問いに答えよ.



(a) この回路のスイッチが閉じているとき, コンデンサーの電荷 $q(t)$ の満たすべき時刻 t に対する微分方程式を, キルヒホッフの法則を用いてたてよ.

(b) 最初, 回路のスイッチが開いており, コンデンサーには電荷が蓄えれていなかった ($q(0) = 0$). その後時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じた, このとき $q(t)$ を上で求めた微分方程式を解くことにより求め, $q(t)$ および回路に流れる電流 $i(t)$ を時間の関数として図示せよ.

問 5 *(**RC 回路**) 問 3 の回路で直流電源を電圧が $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ の交流電源に置き換えた, このとき,

(a) この回路のスイッチが閉じているとき, コンデンサーの電荷 $q(t)$ が満たすべき時刻 t に対する微分方程式を, キルヒホッフの法則を用いてたてよ.

(b) 上で求めた微分方程式の一般解を求めよ. また, 初期条件 $q(0) = q_0$ のもとで $q(t)$ を求めよ.

(c) $t >> RC$ でこの方程式の解が $q(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ の形に表せることを示し, A, θ を求めよ. また, A を ω の関数として図示せよ.

(d) $t >> RC$ のとき抵抗 R による消費電力の周期 $T = 2\pi/\omega$ についての時間平均

$$\overline{W} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Ri^2(t')dt'$$

を計算せよ.

【自習用の問題】

問 1***(体積・面積分)** 以下に示すような電荷分布を持った様々な物体がある. 各々の物体の持つ電荷を次のような手順により体積積分あるいは面積分を行い求めよ.

(1) その体積 (面積) が無限小の極限で電荷密度が一定とみなせる領域に分割する (例えば, 厚さが Δr の球殻など). その際, 物体の形状およびその微小体積 (面積) 領域をできるだけ正確に図示せよ. また, 半径, 高さ, 厚さなども書き入れよ.

(2) 上で見つけた微小体積 (面積) 領域にある電荷を求めよ.

(3) 微小領域にある電荷の総和を各領域の体積 (面積) 無限小の極限をとることにより積分の形に表し, 全電荷を求めよ.

以下, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり, ρ_0, σ_0 は定数とする.

(a) 原点を中心とする半径 a の球状領域内で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0 r^2$.

(b) 原点を中心とする半径 a の球状領域内で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0(x^2+y^2)$.

(c) 原点を中心とする半径 a の球状領域内で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0|z|$.

(d) z 軸を中心軸とする半径 a, 底面が $z=0$, 上面が $z=h>0$ にある円柱内部で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0 z$.

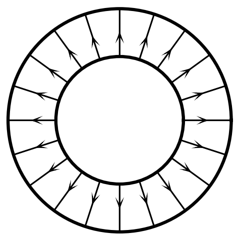
(e) 上と同じ円柱内部で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0 e^{-x^2-y^2}$.

(f) 上と同じ円柱内部で体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})=\rho_0|x|$.

(g) x-y 平面上で面電荷密度 $\sigma(x,y)=\sigma_0(a^2+x^2+y^2)^{-3/2}$.

(h) 半径 a の球面上で面電荷密度 $\sigma(\theta)=\sigma_0(\cos\theta)^2$. ただし, θ は z 軸と球面上の点と原点を結ぶ直線のなす角度.

問 2***(導体球殻)** 中心を共有する半径 a および半径 b の導体球殻がある ($b>a$ とする). この二つの導体のあいだに右図に示すような電気力線が生じており, それ以外の場所では電場はゼロであるとするとき以下の問いに答えよ.



(a) 定量的に問題を解く前にこの系の電場および静電ポテンシャルを r の関数としてグラフに描け. またどうしてそうなると考えるのかを論理的に説明せよ. グラフの曲率の正負にも注意せよ. さらに導体表面の電荷の符号はどうなるか?

(b) ガウスの法則を用いる方法とポアソン方程式を解く方法の二つの方法で電場および静電ポテンシャルを r の関数として求め, 結果が一致することを確かめよ. ただし, 内側の球殻表面の電場を E_0 とする.

(c) この系の静電エネルギーを求めよ.

(d) この系をコンデンサーとするとき静電容量を求めよ.