小試験

2 次元直交座系と 2 次元極座標系の関係について以下の問いに答えよ.

(a) 2 次元直交座系の x, y 成分を r, θ で表せ.

(b) 速度 $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y$, 加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y$ を r, θ およびそれらの時間微分を用いて表せ.

(c) 2 次元直交座系の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$, 加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を表せ.

(d) 質点の質量を m, それに働く力が $\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ であるとき, この質点の運動方程式を極座標を用いて表せ.

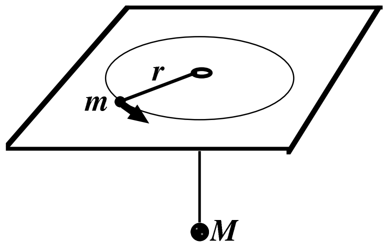
演習問題

問 1 ある定点 $\boldsymbol{r_0}$ から位置 $\boldsymbol{r}$ にある質量 m の質点に両者を結ぶ方向, すなわち $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}$ 方向に力が働いている (このような力は定点からの中心力と呼ばれる).

(a) この質点の角運動量 $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) \times (m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt})$ が保存する (時間とともに変化しない) ことを示せ.

(b) Δt を微小時間として, $\boldsymbol{L}\Delta t$ の大きさが $\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r_0}$ と $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r_0}$ を 2 辺とするような三角形の面積に比例しており, その方向がこの三角形の面に垂直であることを示せ.

問 2 糸を滑らかな水平面にあけた滑らかな穴に通し, 一方の端に質量 M の質点を結んで穴から吊るし, 他端には質量 m の質点を結んで水平面上に置き, この質点 m に糸と垂直方向に速度を与えた. 質点 m の初速を v_0, このときの水平面上での糸の長さを l_0 として以下の問いに答えよ.



(a) 質点 M の鉛直方向の運動方程式と 2 次元極座標を用いて質点 m の水平面上の運動方程式をたてよ. その際, 糸の張力を S とせよ.

(b) 上で求めた運動方程式から質点 m の角運動量の保存を示せ. また, この系のエネルギー保存の式を導け.

(c) 質点 m は動径方向 r のどのような範囲を動きうるかエネルギー保存の式を用いて調べよ. 質点 M および m はどのような運動をするか論ぜよ.

問 3 質量 m の質点がバネ係数 k のバネで天井から吊るされている.

(a) このバネの自然長を l, 鉛直方向を z 座標としてこの質点の運動方程式を求めよ.

(b) 質点が静止しているときの釣り合いの位置 z_0 からの変位を $u(t) = z(t) - z_0$ とすると鉛直方向の運動方程式は $m\ddot{u} = -ku$ と表されることを示せ.

(c) 運動方程式の一般解を求めよ.

(d) 時刻 $t = 0$ で (i) 釣り合いの位置から静かに A だけ引き延ばして離した場合, (ii) 釣り合いの位置で初速度 v_0 を与えた場合についてこの質点の運動を求めよ. それぞれの場合について $z(t)$ を時間の関数として図示せよ.

問 4 水中で質量 m の質点が長さ l の糸で吊るされている. この振り子を振らせるとき, 質点はその速さの K 倍の抵抗を水から受けるとする. $t = 0$ で微小な角度 θ_0 だけ鉛直方向からずらして静かに放すとき, この振り子の運動を求めよ. 水による浮力は無視できるとしてよい.

問 5 滑らかな水平面上で, 距離 l だけ離れた 2 点間に張力 T の糸を張り, 糸の中央に質量 m の質点を取り付ける. この質点を糸に垂直に水平方向に少しずらして放したときの微小振動の周期を求めよ. なお, 振幅は小さく張力の変化は無視できるとする.

レポート問題 (10) (A4 のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること. 小試験後に回収.)

問 1 時間 t に関する微分方程式 $\ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0$ (α は正の定数) について以下の問いに答えよ.

(a) この微分方程式の一般解を求めよ.

(b) 3 つの初期条件 i) $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$, ii) $x(0) = \dot{x}(0) = 1$, iii) $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -1$ について特殊解を求め, それぞれの場合について時間の関数として図示せよ.

問 2 正電荷 $q(> 0)$ をもつ質量 m の粒子がある. この粒子を鉛直方向上方が z 軸であるとすると $\boldsymbol{E} = -Dz\boldsymbol{k}$ ($D > 0$) と表される電場中に放つ.

(a) この粒子の運動方程式を求めよ.

(b) 電場により粒子が受ける力と重力が釣り合う位置を z_0 とし, この位置からの鉛直方向の変位を $u(t) = z(t) - z_0$ とするとき, 鉛直方向の運動方程式を u を用いて表せ.

(c) 粒子が釣り合いの位置にあるとき, 時刻 $t = 0$ で鉛直方向に初速度 v_0 を与えた. この粒子の運動を求めよ. $z(t)$ を時間の関数として図示せよ.

(d) 電荷が負の場合, どのような運動になるか?

(e) (c) と同じ条件で, 初速度を鉛直方向 v_0, 水平方向 v_{h} とした場合はどうなるか？