
小試験

質量 m の質点が x - y 平面内で運動している.

- (a) x - y 平面上での極座標 (r, θ) を用いて質点の速度の動径成分および角度成分を r, θ およびそれらの時間微分を用いて表せ.
- (b) この質点の運動エネルギーを m, r, θ およびそれらの時間微分を用いて表せ.
- (c) 同様に角運動量 $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ を極座標で表せ.

演習問題

問 1 台の上に質量 m の物体を置いて台を振動させる.

- (a) 周期 T , 振幅 A で上下に単振動を行うとき, 物体が台から離れないための条件を求めよ.
- (b) 同じ周期、振幅で左右に振動させる場合, 物体がすべり出さないための条件を求めよ. ただし, 静止摩擦係数を μ とする.

問 2 水平面上で, 棒がその一端で固定され, 一定の角速度 ω で回転している. この棒の上に質量 m の質点が滑らかに束縛されている. この質点を時刻 $t = 0$ で固定点からの距離 a の位置に静かに置くと, その後この質点の固定点からの距離 r および棒から受ける抗力はどうなるか?

問 3 質量 m_1, m_2 の質点が, なめらかな水平面上で自然長 l , バネ定数 k のバネでつながれている. この 2 つの質点 m_1, m_2 は水平方向 x 軸上にあり, 時刻 t での位置が $x_1(t), x_2(t)$ で表されるとして以下の問いに答えよ.

- (a) 質量 m_1, m_2 の運動方程式をたてよ. また, 質点 m_1 から見た m_2 の相対位置 $x' = x_2 - x_1$, および 2 つの質点の重心 $x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ についての運動方程式をたてよ.
- (b) $t = 0$ でバネを a だけ引き延ばして静かに離れた, $x_1 = 0, x_2 = l + a$ として重心 x_G, x' を時間の関数として求めよ.
- (c) 以上の結果より, 質点 m_1 と m_2 の運動はどのようなになるか? 運動の様子を t の関数として図示せよ.

問 4 n 個の質点 m_i からなる質点系において, 質点間に働く力は内力だけであり, この内力が中心力であるとする. このとき, この質点系の全角運動量は保存することを示せ. なお, 全角運動量は $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ であり, 内力が中心力であるとは, 質点 m_i, m_j 間に $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ と同じ方向の力が働いている場合を言う.

問5 バネ定数 k のバネに質量 m のおもりがつけられて、なめらかな水平面上で x 軸方向に運動している。このおもりに速度に比例する抵抗 $-Sv$ が働いている。このおもりの運動方程式を求めよ。さらに運動方程式を解き、(a) $S^2 < 4km$ のとき、(b) $S^2 > 4km$ の場合に運動の様子を時間の関数として図示せよ。

レポート問題(12) (A4のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること。小試験後に回収。)

問1 次の x に関する微分方程式の一般解を求めよ。

(a) $y'' - 4y' - 5y = 5x + 6$

(b) $y'' + 4y' + 5y = \cos 3x$

(c) $y'' + 4y = \sin 3x$

問2 演習の問3で $t = 0$ でバネを自然長に保ったまま質点 m_1 に速度 $\dot{x}_1 = v_0$ を与えたとき、その後の質点 m_1 と m_2 の運動はどうなるか? 時刻 t での座標 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求め、それらを時間の関数として図示せよ。