物理科学演習 No.1（田中班） 平成 19 年 5 月 7 日

小試験

質点の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t) = a\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + a\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$ で与えられている．このとき以下の問いに答えよ (a, ω は正の定数).

(a) 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ を求めよ.

(b) $\boldsymbol{\alpha} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ を示せ.

(c) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$ を求めよ.

(d) $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ を求めよ.

問 1 ベクトル $\boldsymbol{a} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{b} = \cos\beta\boldsymbol{i} - \sin\beta\boldsymbol{j}$ の内積と外積を用いて余弦, 正弦の加法定理を導け.

問 2 $\boldsymbol{r}_0$ を中心とする半径 a の球面上を動く質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ の間に, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{v} = 0$, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha} + v^2 = 0$ が成り立つことを示せ.

問 3 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき,

(a) 線分 AB を $x{:}y$ に分ける点 P を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(b) 三角形 ABC の重心 G は $\boldsymbol{g} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$ である.

(c) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ. また, $\boldsymbol{a} = (0,1,1)$, $\boldsymbol{b} = (1,0,1)$, $\boldsymbol{c} = (1,1,0)$ のときの体積を求めよ.

問 4 時刻および位置によらず一定な電場 $\boldsymbol{E}$ の中を電荷 q, 質量 m の質点が運動している. このとき以下の問いに答えよ.

(a) この質点の運動方程式を求めよ.

(b) 任意の時刻 t での位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を, 初期条件 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ のもとで, 運動方程式を時間ついて積分することにより求めよ.

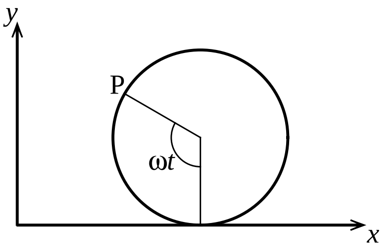
(c) (b) で求めた $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{v}(t)$ を用いて以下の関係 (エネルギーの保存) を示せ.

$$\frac{m}{2}v^2(t) - q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}(t) = \frac{m}{2}v_0^2$$

(d) 運動方程式の両辺について $\boldsymbol{v}(t)$ の内積をとり, これを時刻 0 から t まで積分することにより (すなわち, $\int_0^t \boldsymbol{v}\cdot m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\,dt = \int_0^t \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}\,dt$), 上記の関係を示せ.

(e) $(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{r}(t) = 0$ を示せ.

問 5 x-y 平面内にあって x 軸に接する半径 a の円盤が x 軸上を滑らずに角速度 ω で転がっていく. 時刻 $t = 0$ でこの円盤上の x 軸と接する点 P が原点にあるとして, 以下の問いに答えよ.



(a) 点 P の位置ベクトルを時間の関数として求め, その軌跡を図示せよ.

(b) 速度ベクトルを時間の関数として求め, その軌跡を図示せよ.

(c) 加速度ベクトルを時間の関数として求め, その軌跡を図示せよ.

レポート問題 (3)

(A4 のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること. 小試験後に回収.)

問 1 次の行列式の値を求めよ.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

問 2 以下を計算せよ ($r = |\boldsymbol{r}|$).

(i) $\dfrac{d}{dt} r^2$ (ii) $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big)$ (iii) $\dfrac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{r} \times \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big)$ (iv) $\dfrac{dr}{dt}$

問 3 水平な机の上に質量 M の板があり, その上に質量 m の小物体が置かれている. 時刻 $t = 0$ のとき, 板に速さ v_0 を与えた. 小物体は最初, 板の上で板の速度とは逆方向に滑っていたが, 板が静止する前に滑らなくなった (板に対する相対速度がゼロとなった). 小物体と板, 板と机の動摩擦係数をそれぞれ μ_1, μ_2 として以下の問いに答えよ.

(a) 小物体が板の上で滑っている時と止まっているときの小物体と板の運動方程式を求めよ.

(b) 小物体が滑らなくなるまでの小物体の板の上での移動距離と時間を求めよ.

(c) 小物体が板の上で止まった後, 板の運動はどうなるか？