物理科学演習 No.5（田中班） 平成 19 年 5 月 14 日

小試験

問 1 ベクトルを用いて, 平行四辺形の 2 辺の大きさの 2 乗の和は, 2 つの対角線の長さの 2 乗の和の半分に等しいことを示せ.

問 2 $\boldsymbol{r}_0$ を中心とする半径 a の球面上を動く質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, 速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ の間に, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{v}=0$, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}+v^2=0$ が成り立つことを示せ.

演習問題

問 1 以下の微分方程式の一般解と括弧内の初期条件を満たす特殊解を求めよ.

(a) $\dfrac{dy}{dx}=6x^2+2x, \qquad (y(0)=1)$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\log|x|, \qquad (y(1)=1)$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=3x+2, \qquad (y(0)=2,\ y'(0)=1)$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x, \qquad (y(0)=0,\ y'(0)=0)$

問 2 括弧内に示された初期条件のもとに, 以下の微分方程式を解け. $\boldsymbol{r}(t)$ が時刻 t における粒子の位置ベクトルであるとすれば それぞれどのような運動か?

(a) $\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{i}-\frac{1}{t^2}\boldsymbol{j}, \qquad (\boldsymbol{r}(1)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

(b) $\dot{\boldsymbol{r}}(t)=-\cos t\,\boldsymbol{i}+2\sin 2t\,\boldsymbol{j}, \qquad (\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{j})$

(c) $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=2\boldsymbol{k}, \qquad (\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0},\ \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

(d) $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=-\cos t\,\boldsymbol{i}-\sin t\,\boldsymbol{j}, \qquad (\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0},\ \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{k})$

問 3 点 P, A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とするとき, 以下を示せ.

(a) 点 A, 点 B を通る直線上の点 P の満たす方程式は, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

(b) 3 つの点 A, B, C を通る平面上の点 P の満たす方程式は,

$$\{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=0.$$

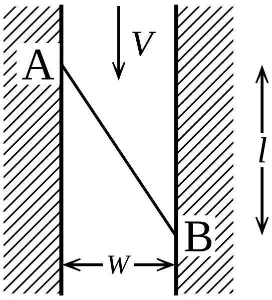
(c) 線分 AB を直径とする球面上の点 P の方程式は, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})=0$.

問 4 縁の半径が a のパラソルの支柱が鉛直になるように立てて角速度 ω で回転させる. 地面から縁までの高さが h であるとき, パラソルの縁についていた水滴はどのような軌跡を描いて落ちるか？また, 落ちた水滴は地面にどのように分布するか?

問 5 一定の速さ (水面に対する相対速度の大きさ)v の船が幅 W の川の川縁にある港 A から出航し, 川に沿って l だけ川下にある対岸の港 B へ 2 つの港を結ぶ直線航路に沿って向かう.

(a) 港 B まで行くのに時間 t かかった. 川の流れの速さを V として v を求めよ.

(b) この船が港 B から港 A へもどるのにかかる時間 t' を求めよ.



レポート問題 (4) (A4 のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること. 小試験後に回収.)

問 1 位置ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$ であることを示せ.

問 2 水平な地面から投射角 θ, 初速 v_0 で質量 m のボールを投げる. 重力加速度を g, ボールの大きさおよび空気抵抗は無視できるとして以下の問いに答えよ.

(a) ボールの運動方程式を求めよ.

(b) 運動方程式を時間積分することにより, ボールの運動を求めよ. また, ボールの最高到達点とその時刻を求めよ.

(c) 初速 v_0 を一定にして, 投射角 θ を色々変えたとき, 最高到達点の集合は楕円の上にあることを示せ.