

小試験

時刻および位置によらず一定な電場 E の中を電荷 q , 質量 m の質点が運動している. このとき以下の問いに答えよ.

- (a) この質点の運動方程式を求めよ.
 (b) 任意の時刻 t での位置 $\mathbf{r}(t)$ と速度 $\mathbf{v}(t)$ を, 初期条件 $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ のもとで, 運動方程式を時間について積分することにより求めよ.
 (c) 上で求めた $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{v}(t)$ を用いて以下の関係 (エネルギーの保存) を示せ.

$$\frac{m}{2}v^2(t) - q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}(t) = \frac{m}{2}v_0^2$$

演習問題

問 1 次の直角座標 (x, y, z) で表された点を, 円筒座標 (r, θ, z) および極座標 (r, θ, ϕ) で表せ.

- (a) $(1, 1, \sqrt{2})$ (b) $(3, -\sqrt{3}, 2)$ (c) $(-3, -4, -5)$

問 2 次の関数を $x = 0$ の近傍でべき級数展開せよ.

- (a) $\cosh x$ (b) $\frac{x}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

問 3 a, b をゼロでない定数とするとき, 以下の微分方程式の一般解と括弧内の初期条件が与えられているものに対してはその特殊解を求めよ.

- (a) $\frac{dy}{dx} = 2y, \quad (y(0) = 1)$
 (b) $\frac{dy}{dx} + ay + b = 0, \quad (y(0) = 1)$
 (c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (y(0) = a)$
 (d) $(1+x)\frac{dy}{dx} + (1+y) = 0, \quad (y(1) = 1)$
 (e) $\frac{dy}{dx} + (y-a)(y-b) = 0$

問 4 熱容量 C の物体が温度 T_1 の熱浴の中に置かれている. この物体を時刻 $t = 0$ で温度 $T_2 (> T_1)$ に加熱し, その後放置した. この物体の温度を T とするとき, 単位時間あたり熱 $q = \kappa(T - T_1)$ がこの物体から熱浴へ流出する.

- (a) この物体の温度 T の時間に関する微分方程式を求めよ.
 (b) 上で求めた微分方程式を解け.
 (c) 物体の温度 T を時間の関数としてグラフに描け.

問5 質量 m の物体を鉛直下向きに自由落下させた. 物体には速度 v に比例した空気抵抗が働くとする. 重力加速度を g , 空気抵抗の比例係数を γ として次の問いに答えよ.

- (a) 鉛直方向を z 軸として運動方程式を導け.
- (b) 時刻 $t = 0$ で $z = 0, v = 0$ として運動方程式を解け. また, 十分な時間の後, 物体の速度はどうなるか?
- (c) z, v を $t = 0$ の周りでテーラー展開することにより, $|t| \ll m/\gamma$ における z, v の振る舞いを調べよ. また, $t \rightarrow \infty$ ではどうなるか?
- (d) 速度および物体の位置を時間の関数として図示せよ.

問6 密閉容器の中で微生物が飼育されている. この微生物の時刻 t での数を $N(t)$ とすると, 単位時間当たり $\alpha N(t)$ が新たに誕生し, 一定数 D が死亡する.

- (a) $N(t)$ に対する微分方程式を立てよ.
- (b) 時刻 $t = 0$ で微生物の数が N_0 であるとして $N(t)$ を求めよ.
- (c) この微生物が増え続けるための条件を求めよ. また, 増え続けることができない場合, この微生物が完全に死滅する時刻はいつか?

レポート問題(6) (A4のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること. 小試験後に回収.)

問1 以下のベクトル関係式を証明せよ.

- (a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- (b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- (c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$

問2 地面から鉛直上向きに質量 m のボールを初速 v_0 で投げる. 重力加速度を g , ボールには比例係数 γ の速度に比例した空気抵抗が働くとして以下の問いに答えよ.

- (a) ボールの運動方程式を求めよ.
- (b) 運動方程式を時間積分することにより, ボールの運動を求めよ. また, ボールの最高到達点とその時刻を求めよ.
- (c) 速度およびボールの位置を時間の関数として図示せよ.