物理科学演習 No.7（田中班） 平成 19 年 5 月 28 日

小試験

a, b をゼロでない定数とするとき, 以下の微分方程式の一般解と括弧内の初期条件に対しその特殊解を求めよ.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y, \qquad (y(0) = 1)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + ay + b = 0, \qquad (y(0) = 1)$

演習問題

問 1 べき級数展開について以下の問いに答えよ.

(a) $(1+x)^\alpha$ を $x = 0$ の近傍でべき級数展開せよ.

(b) 上で α が正の整数のとき二項定理に帰着することを示せ.

(c) $|x| << a$ のとき次の関数を x について 6 次までべき級数展開せよ.

(a) $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2} - a}{x^2}$ (c) $\dfrac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ (d) $\log(a^2 + x^2)$

問 2 磁場中を運動する荷電粒子には, ローレンツ力 ($\boldsymbol{F}_{\rm L} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$) が作用する. ここで, $\boldsymbol{B}$ は磁束密度, $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ はそれぞれ粒子の電荷および速度である. 重力は無視できるとして以下の問いに答えよ.

(a) $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の静磁場を $-e$ の電荷を持つ荷電粒子が運動している, $t = 0$ でこの粒子の速度が $\boldsymbol{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ とするとき, $t = 0$ でこの粒子に働くローレンツ力 $\boldsymbol{F}_{\rm L}$ を求めよ.

(b) この粒子の速度を $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ とするとき, 粒子の運動方程式を求めよ. ただし粒子の質量を m とする.

(c) 速度 $\boldsymbol{v}(t) = \left(v_0 \cos\left(\frac{eB}{m}t\right), v_0 \sin\left(\frac{eB}{m}t\right), 0\right)$ が, 上で求めた運動方程式を満たすことを確かめよ.

(d) この粒子の $t = 0$ での速度が $\boldsymbol{v}(0) = (v_0, 0, v_0)$ の場合, どのような運動をするか?図を用いて説明せよ.

問 3 2 次元極座標系に関して以下の問いに答えよ.

(a) 2 次元直交座標系の位置 (x, y) を極座標 (r, θ) を用いて表せ.

(b) 直交座標での速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ およびその大きさを極座標を用いて表せ.

(c) 直交座標での加速度 $(\ddot{x}, \ddot{y})$ およびその大きさを極座標を用いて表せ.

問 4 3 次元直交座標系 (x, y, z) で表示された質量 m の質点の運動エネルギーを円筒座標系 (r, θ, z) および極座標系 (r, θ, φ) で表せ.

問 5 質量 m の物体を鉛直下向きに自由落下させた. 物体には速さ v の 2 乗に比例した空気抵抗 γv^2 が働くとする. 重力加速度を g として次の問いに答えよ.

(a) 鉛直方向を z 軸として運動方程式を導け.

(b) 時刻 $t = 0$ で $z = 0$, $v = 0$ として運動方程式を解け. また, 十分な時間の後, 物体の速度はどうなるか?

(c) z, v を $t = 0$ の周りでテーラー展開することにより, $|t| \ll \sqrt{\frac{m}{\gamma g}}$ における z, v の振る舞いを調べよ. また, $t \to \infty$ ではどうなるか?

(d) 速度および物体の位置を時間の関数として図示せよ.