

小試験

複素数に関して以下の問いに答えよ.

- (a) 関数 e^x , $\sin x$, $\cos x$ の $x = 0$ でのべき級数展開を用いてオイラーの定理 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を示せ.
- (b) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ を用いて正弦, 余弦に関する加法定理を導け.

演習問題

問1 複素平面上で $z = re^{i\theta}$ とするとき, (1) z^* , (2) $-z$, (3) iz , (4) $-iz$, (5) z^2 , (6) $z + iz$ はどのような位置にあるか図示せよ.

問2 長さ l の糸に質量 m の質点が吊るされている.

- (a) 糸が鉛直方向から θ 傾いているとき, 運動方程式を極座標系で求めよ.
- (b) θ が十分小さいとき, この糸の運動は単振動に帰着することを示し, その周期を求めよ.

問3 質量 m の質点が $F(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{2\beta}{x^3}$ で表せる力 (ただし, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x > 0$ とする) を受けて x 軸上で運動しているとする.

- (a) 質点の運動方程式を求めよ.
- (b) 力 $F(x)$ のポテンシャル $U(x)$ を求めよ. また, $F(x)$, $U(x)$ を x の関数として図示せよ. ただし $x \rightarrow \infty$ のとき $U(x) \rightarrow 0$ とせよ.
- (c) 運動方程式の両辺に \dot{x} を掛け時間について積分を行うことによりエネルギー保存則を導け.
- (d) 全エネルギーが E であるとき, この質点が振動するための条件とその振動範囲 $[x_1, x_2]$ を求めよ.
- (e) $U(x)$ が極小値を取るときの x を x_0 とする. 質点が $x = x_0$ の近くで振動するとき, 質点の運動は近似的に単振動とみなせる. $U(x)$ を $x = x_0$ の周りで2次までテーラー展開せよ. $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ より, 力を求めることにより運動方程式をたて振動周期を求めよ.

問5 2次元直交座系と2次元曲座標系の関係について以下の問いに答えよ.

- (a) 2次元直交座系の x, y 成分を r, θ で表せ.
- (b) 速度 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y$, 加速度 $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y$ を r, θ およびそれらの時間微分を用いて表せ.
- (c) 2次元直交座系の基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ を用いて速度 $\dot{\mathbf{r}}$, 加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ を表せ.

- (d) 質点の質量を m , それに働く力が $F = F_r e_r + F_\theta e_\theta$ であるとき, この質点の運動方程式を曲座標を用いて表せ.

レポート問題(8) (A4のレポート用紙に、学生番号、氏名を記入し、二枚以上の場合は左上をポッチキスで止めること. 小試験後に回収.)

$|x| \ll a$ のとき次の関数を x について 6 次までべき級数展開せよ.

(a) $\frac{1}{a^2 + x^2}$ (b) $\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x^2}$ (c) $\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ (d) $\log(a^2 + x^2)$