問 1. 黒体放射（黒体輻射）

温度 T、一辺 L の立方体空洞内の熱放射を考える。

(a) 真空中の電磁波の方程式はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を用いて

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$$
$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

のように表すことができる。ここで、$\nabla^2\boldsymbol{A} \equiv (\nabla^2 A_x,\, \nabla^2 A_y,\, \nabla^2 A_z)$ である。周期境界条件 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \boldsymbol{A}(x+L,y,z)$, $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \boldsymbol{A}(x,y+L,z)$, $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \boldsymbol{A}(x,y,z+L)$ を仮定するとき、平面波の形の解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\omega t)$$

が取りうる波数 $\boldsymbol{k}$、これに対応する角周波数 $\omega(\boldsymbol{k})$、$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}$ の満たすべき条件を求めよ。また、これをもとに電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を求めよ。

(b) ω から $\omega + d\omega$ までの角周波数を持つ光子のモードの数 (あるいは 1 粒子状態数) を $D(\omega)d\omega$ とするとき、

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

となることを示せ。ただし、$V = L^3$。また、波数 $\boldsymbol{k}$ の光子、各々について 2 つの独立な偏光状態（すなわち直交する 2 つの $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}$) があることに注意せよ。

(c) 角周波数 ω のモードにある光子のエネルギーは $\hbar\omega$ である。単位角周波数当たりの光のエネルギーは

$$u(\omega) = \frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}) - 1}$$

で与えられることを示せ（プランクの放射法則)。低周波数、高温極限 ($\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T \ll 1$) では

$$u(\omega) = \frac{Vk_{\mathrm{B}}T\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

と近似できることを示せ（レイリー–ジーンズの放射法則)。また、高周波数、低温極限 ($\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T \gg 1$) ではどのような振る舞いをするか？これらの結果をもとに、$u(\omega)$ の概形を ω の関数として図示せよ。

(d) 空洞内の全電磁エネルギー $U(T)$ が

$$U(T) = \frac{\pi^2 V k_{\mathrm{B}}^4}{15\hbar^3 c^3}T^4$$

で与えられることを示せ (ステファン–ボルツマンの法則)。なお必要であれば、$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$ を用いてよい。

問 2. 放射圧（輻射圧）

温度 T の熱浴に接した体積 V の光子気体があるとしよう。この光子気体の平均エネルギー密度を $u = U/V$ とすると、放射圧 P は

$$P = \frac{u}{3}$$

となることを以下の 2 つの方法で示せ。

(a) 光子気体の分配関数 Z は

$$Z = \prod_k^{\infty} \frac{1}{1 - \exp(-\frac{\varepsilon_k}{k_{\mathrm{B}}T})}$$

と書けることを示せ。ただし、k は光子の偏光を含めたモードを表わし、ε_k はモード k にある光子のエネルギーを表わす。Z より自由エネルギー F を求め、関係式 $P = -\partial F/\partial V$ を用いて、圧力 P を求めよ。

(b) 熱力学の関係式 $P = -\partial F/\partial V$ より、

$$P = -\sum_k \langle n_k \rangle \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial V}$$

と書ける。ここで $\langle n_k \rangle$ はモード k にある光子数の熱力学的平均値を表わす。圧力 P を求めよ。

問 3. 固体の圧力

体積 V の固体を構成する原子の結合ポテンシャルエネルギー、すなわち、各原子がその平衡位置で静止していると仮定した場合のエネルギー、を $\Phi(V)$ とする。さらに、各原子の平衡位置近傍での振動は調和振動で近似できるとして、その基準振動の振動数を ν_i とする ($i = 1, 2, \ldots, 3N - 6$)。基準振動数 ν_i は体積 V に依存しており、定数 $\gamma > 0$ によって

$$\frac{\partial \log \nu_i}{\partial \log V} = -\gamma$$

と関連づけられているとしよう。このとき、この固体の圧力は

$$P = -\frac{d\Phi}{dV} + \gamma \frac{U}{V}$$

と書けることを示せ。ただし、内部エネルギー U は原子の振動による部分である。

問 4. 1 次元、2 次元結晶のデバイ比熱

1 次元および 2 次元結晶のデバイ比熱が、それぞれ温度 T の 1 乗および 2 乗に比例することを示せ。