問 1. 相互作用のないスピン系

N 個の全角運動量 J の自由原子またはイオンからなる系に磁場 H を作用するとき、各原子（イオン）のエネルギー準位は $E(J_z) = g\mu_{\mathrm{B}} H J_z$ で与えられる（ここで $J_z = J, J-1, \cdots, -J$。また、μ_{B} を Bohr 磁子、g を Landé の g 因子という）。このとき

(a) 分配関数 Z を次の形に導け。

$$Z = \left\{ \sinh\left(\frac{1}{2}\frac{g\mu_{\mathrm{B}}(2J+1)H}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \Big/ \sinh\left(\frac{1}{2}\frac{g\mu_{\mathrm{B}}H}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \right\}^N$$

(b) この系の磁気モーメントの平均値 $M = -Ng\mu_{\mathrm{B}}\langle J_z \rangle$ は、$F = -k_{\mathrm{B}}T \log Z$ で定義される自由エネルギー F を使って

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T$$

から求めることができることを確かめよ。

(c) 上の結果を用いて

$$M = Ng\mu_{\mathrm{B}} J B_J\left(J\frac{g\mu_{\mathrm{B}}H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

を導け。ここで、$B_J(x)$ は

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

であり、Brillouin 関数という。

(d) もし、$J = 1/2,\ g = 2$ なら、上の結果は

$$M = N\mu_{\mathrm{B}}\tanh\left(\frac{\mu_{\mathrm{B}}H}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

になる。また、$J \to \infty$ なら、このときの $g\mu_{\mathrm{B}}J$ の極限値を μ であらわして

$$\begin{aligned} M &= N\mu L\left(\frac{\mu H}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \\ L(x) &= \coth(x) - 1/x \end{aligned}$$

となることを示せ。ここで, $L(x)$ は Langevin 関数と呼ばれる。

(e) 十分温度が高いとき, 帯磁率 $\chi = (\partial M/\partial H)_T$ が

$$\chi = N\frac{J(J+1)g^2\mu_{\mathrm{B}}^2}{3k_{\mathrm{B}}T}$$

となることを示せ。

問 2. **1 次元 Ising モデル（相互作用のあるスピン系）**

N 個のスピンからなる、1 次元 Ising モデルの分配関数 Z は

$$Z = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots=\pm1} e^{K\sum\sigma_i\sigma_{i+1}} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots=\pm1}\prod_{i=1}^{N} e^{K\sigma_i\sigma_{i+1}}$$

と表される。ここで、$K = J/k_{\mathrm{B}}T$ である。また、鎖の両端はつながって環をなしている、すなわち $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ とせよ（周期境界条件）。このとき次の結果を示せ。

(a) 以下を示せ。

$$e^{K\sigma_i\sigma_{i+1}} = \cosh K + \sigma_i\sigma_{i+1}\sinh K.$$

(b) 分配関数 Z を計算しよう。まず、数学的帰納法を用いて、一般の n について

$$\begin{aligned} T_n(\sigma_1, \sigma_{n+1}) &\equiv \sum_{\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n=\pm1} \prod_{i=1}^{n} e^{K\sigma_i\sigma_{i+1}} \\ &= 2^{n-1}(\cosh^n K + \sigma_1\sigma_{n+1}\sinh^n K) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ。これから

$$Z = \sum_{\sigma=\pm1} T_N(\sigma,\sigma) = 2^N(\cosh^N K + \sinh^N K)$$

を示せ。

(c) N が無限に大きいなら、上の結果は $Z = 2^N \cosh^N K$ としてよい（なぜか？）。これを用いて、この系の内部エネルギーおよび比熱を求めよ。これらの結果は N 個の独立な 2 準位系（エネルギーを $\pm J$ とする）で得られるものと一致することを示し、その理由を考えてみよ。

(d) 2 つのスピンの間の相関関数 $\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle$ が

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+n}\rangle = \tanh^n K + \tanh^{N-n} K$$

となることを示せ（ヒント：(b) で求めた $T_n(\sigma_i, \sigma_{i+n})$ を用いるとよい）。この結果から、1 次元 Ising モデルでは、有限温度で常磁性-(反) 強磁性転移が起こらないこと示せ。

(e) 磁化 M が $M = \mu_{\mathrm{B}}\sum_i \sigma_i$ であることに注意して、帯磁率 χ が

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2}{k_{\mathrm{B}}T} \\ &= \frac{N\mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}}T}\left\{1 + \sum_{i=1}^{N-1}\langle\sigma_1\sigma_{1+i}\rangle\right\} \\ &= \frac{N\mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}}T}e^{2J/k_{\mathrm{B}}T} \end{aligned}$$

となることを示せ。正の J と負の J とでは帯磁率の温度変化はどう違うか？図を描いてみよ。