問 1. 統計力学でよく用いる積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$$

を求めよう。（n は正の整数）

(a) 以下を示せ。

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(b) n が偶数のとき、(a) で式の両辺を α で m 回微分して、$\alpha = 1$ とおくことにより

$$I_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となることを示せ。

(c) n が奇数のとき、$t = x^2$ と変数変換して、部分積分を繰り返しおこなうことにより

$$I_{2m+1} = \frac{m!}{2}$$

となることを示せ。

問 2. n 次元球の体積

n 次元球の体積を求めよう。球の半径を r とするとその体積 V_n は、$V_n = C_n r^n$ と表される。係数 C_n を求めるために以下の積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)]\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

この積分を 2 通りの方法、すなわち、変数ごとに積分をおこなう方法と、n 次元球殻に分割して積分をおこなう方法により（$dV_n = nC_n r^{n-1}\, dr$ に注意)、関係式

$$\left(\sqrt{\pi}\right)^n = nC_n I_{n-1}$$

が得られることを示せ。ただし I_n は、**問 1** で定義されている積分の値である。**問 1** の結果を援用して、n が十分に大きいとき、係数 C_n が近似的に $C_n \sim \pi^{n/2}/(n/2)!$ と表されることを示せ。

問 3. 調和振動子 (古典論)

そのハミルトニアンが

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2} q_i^2 \right)$$

で表される N 個の 1 次元調和振動子からなる系を古典論的に考える。

(a) 調和振動子が 1 個のときを考える。系のエネルギーが E と $E + \delta E$ の間にある場合、位相空間 (q_1, p_1) ではどのような領域に対応しているか？図示せよ。また、その面積を求めよ。

(b) 粒子が N 個のとき、系のエネルギーが E と $E+\delta E$ の間にある場合、位相空間の体積はいくらか？これから、微視的状態の数

$$W(E,\delta E)=\frac{1}{h^N}\int_{E<H(\{q_i\},\{p_i\})<E+\delta E} dq_1\,dq_2\cdots dq_N\,dp_1\,dp_2\cdots dp_N$$

を計算せよ（必要なら**問 2** の結果を用いよ）。

(c) $S(E)=k_{\mathrm{B}}\log W$ より、エントロピー S を求め、熱力学の関係式 $1/T=(\partial S/\partial E)$ より、内部エネルギー $E(T)$ を求めよ。

(d) 自由エネルギー $F=E-ST$、比熱 C を計算せよ。

問 4. 気体のエントロピー

体積 V の箱を仕切によって二つの領域に分ける。体積 v の領域には気体を入れ、残りの領域は真空とする。気体分子の数は N 個である。

(a) 体積 v の領域中の気体を古典理想気体と仮定して、状態数

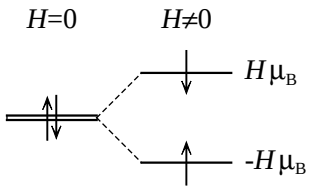
$$W(E,\delta E)=\frac{1}{h^{3N}N!}\int_{E<H(\{\boldsymbol{q}_i\},\{\boldsymbol{p}_i\})<E+\delta E} d^3\boldsymbol{q}_1\,d^3\boldsymbol{q}_2\cdots d^3\boldsymbol{q}_N\,d^3\boldsymbol{p}_1\,d^3\boldsymbol{p}_2\cdots d^3\boldsymbol{p}_N$$

を計算し、エントロピーを求めよ。

(b) 仕切を取り去り、気体が箱全体に一様に広がったときのエントロピーの増加分を求めよ。

問 5. 相互作用のないスピン系

No. 1 の**問 4** と同様に、ほとんど独立なスピン 1/2 の粒子 N 個からなる系を考える。磁場 H を作用すると、各々の粒子のエネルギー準位は μ_{B} をボーア磁子として $\mu_{\mathrm{B}}H$ と $-\mu_{\mathrm{B}}H$ の二つに分裂し（ゼーマン分裂）、磁場の方向に各々 $-\mu_{\mathrm{B}}$, μ_{B} の磁気モーメントをもつとする。



(a) N_+ 個の粒子の磁気モーメントが磁場方向を向いているときの微視的な状態の数 $W(N_+)$ はいくつか？このときのエントロピー $S(N_+)=k_{\mathrm{B}}\log W(N_+)$ を求めよ。

(b) 系のエネルギーは、$E=-\mu_{\mathrm{B}}H(2N_+-N)$ と表せる。N、N_+ が十分大きいとして、スターリングの公式を用いると、この系のエントロピーは $x=E/(N\mu_{\mathrm{B}}H)$ の関数として以下のように表せることを示せ。

$$S=Nk_{\mathrm{B}}\left[\log 2-\frac{1}{2}(1-x)\log(1-x)-\frac{1}{2}(1+x)\log(1+x)\right]$$

(c) エントロピーを x の関数として図示せよ。その際、$x=\pm 1$ での S の値とその微分に注意せよ。また、$x=0$ および $x=-1$ は、どのような状態に対応しているか？

(d) 磁化、すなわち系の全磁気モーメントは $M=\mu_{\mathrm{B}}(2N_+-N))$ であり、エネルギーの保存により、$dE=TdS-MdH$ が成り立つ。S を E と H の関数として表すと、以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_H,\quad \frac{M}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E$$

(e) $1/T=(\partial S/\partial E)_H$ を用いて、内部エネルギー E を T と H の関数として求めよ。

(f) 磁化を T と H の関数として求め、一定な磁場のもとでの磁化の温度依存性をグラフに表せ。

問 6. 調和振動子 (量子論)

振動数 ω を持つ調和振動子のエネルギー準位は、$(n+1/2)\hbar\omega$ である $(n=0,1,2,\ldots)$。N 個のほとんど独立な振動子からなる系を考えるとき、

(a) 系のエネルギーが $(M+N/2)\hbar\omega$ であるときのエントロピーを求めよ。(ヒント: 状態数は、No. 1 の**問 2** の区別できない M 個のあめ玉を N 個の袋に分配する場合と同じである。なぜか？)

(b) 熱力学の関係式 $1/T=(\partial S/\partial E)$ から内部エネルギーを温度の関数として求めよ。(ヒント: **問 5** と同様に、N、M が大きいとしてスターリングの公式を用いるとよい。)

(c) 温度と比熱の関係を図示せよ。

(資料) 問 **2** の係数 C_n は、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いれば、

$$C_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

とも表される。この関数は、複素平面上、実部が正の領域 $(\mathrm{Re}\,z>0)$ で

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

と定義され、$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ という性質を持つ（部分積分を用いて、これを確かめよ!)。n が正の整数のとき、$\Gamma(n+1)=n!$ であり、ガンマ関数は階乗の自然な拡張となっている。また、$\Gamma(1)=1$ および $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ である (後者は $u=t^{1/2}$ と変数変換すれば容易に確かめられる)。なお、$\mathrm{Re}\,z\le 0$ については、$\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ として解析接続することで定義される（$\Gamma(z)$ は、$z=0,-1,-2,-3,\ldots$ で 1 位の極を持つ)。