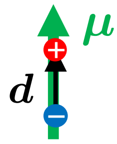
　2019年4月16日，2016/8/30

戸田昭彦

物質の磁性

電流（運動する電荷）のつくる磁場については，「電磁誘導の相対性」や「電磁気力と特殊相対性理論」でも説明したように，運動する電荷によって低速でも生じる相対論的効果として理解される。
磁石のような物質の磁性については，どのように理解されるのであろうか。

磁石のつくる磁場：磁気双極子モーメント，磁気モーメント



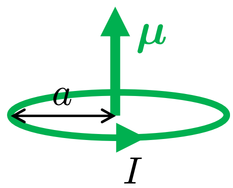
距離 d だけ離れた位置に磁荷 $+q_{\rm m}$ と $-q_{\rm m}$ をもつ物体として磁石を捉える。
$-q_{\rm m}$ から $+q_{\rm m}$ へと磁荷間を結ぶベクトル $\boldsymbol{d}$ と，磁荷の大きさ $q_{\rm m}$ との積で定義されるベクトル
$\boldsymbol{p}_{\rm m} = q_{\rm m}\boldsymbol{d}$ を磁気双極子モーメントとよぶ。
磁気双極子モーメントを真空の透磁率で割った量 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{p}_{\rm m} / \mu_0$ を磁気モーメントという。
磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に置かれた磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ について，位置エネルギーは $-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}$ と表される。
力のモーメント（トルク）$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ が作用する。
磁気双極子が双極子モーメントの向きの遠方につくる磁場は以下のように近似される。

$$B \sim (\mu_0 / 2\pi)\ \mu / r^3$$

磁石～分子の作る円形電流（アンペールの説）

円形の電流が流れると，円の中心軸方向に N,S 極をもつ磁石と同様な磁場が生じる。そこで，磁石の中に分子の作る円形電流が数多く存在することで，全体として磁石の性質が生じると考える。

微小円電流が遠方につくる磁場



半径 a，電流 I の微小円電流が円電流に垂直な向きの遠方につくる磁場は以下のように近似される。

$$B \sim (\mu_0 / 2\pi)\ I\pi a^2 / r^3 = (\mu_0 / 2\pi)\ IA / r^3$$

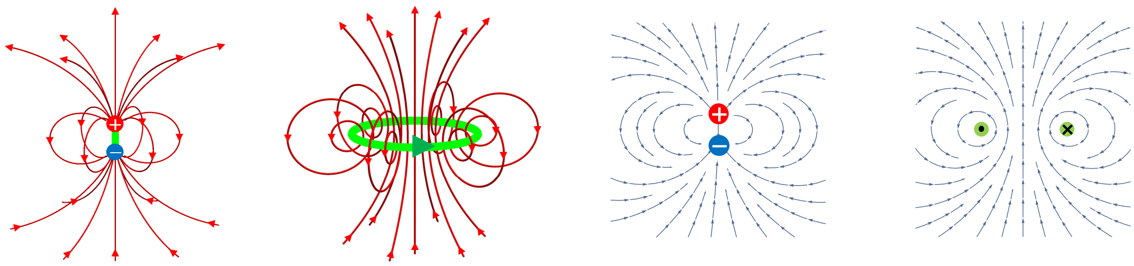
すなわち微小円電流は，遠方では，以下の磁気モーメントをもつ磁気双極子と同様な磁場を作る。

$$\boldsymbol{\mu} = (IA)\boldsymbol{n}$$

ただし，$\boldsymbol{n}$ は円電流に垂直かつ電流の向きに右ネジが締まるときのネジの向きの単位ベクトルである。

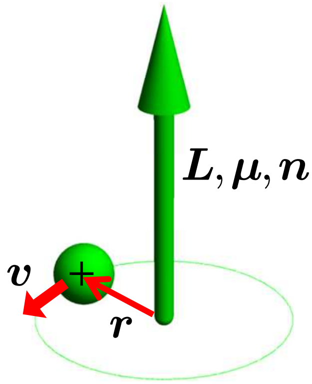
磁気双極子と円形電流のつくる磁力線

立体図　　　断面図



磁気双極子　　円形電流　　磁気双極子　　円形電流

円運動する荷電粒子の角運動量 $\boldsymbol{L}$ と磁気モーメント μ の関係



電流は電荷の流れであるから，電荷 q の荷電粒子が磁気モーメントの向きを軸として右ネジを閉める向きに回転運動していると考えてもよい。粒子の回転運動を特徴付ける力学的な量は角運動量である。

半径 a の円周に沿って，電荷 q ，質量 m の荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で等速円運動しているとき，荷電粒子の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = mva\,\boldsymbol{n}$ である。

円の面積 A と電流 I は，$A = \pi a^2$，$I = q/(2\pi a/v)$ と表せるので，磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は，角運動量 $\boldsymbol{L}$ を用いて，

$$\boldsymbol{\mu} = (IA)\,\boldsymbol{n} = [q/(2\pi a/v)]\,\pi a^2\,\boldsymbol{n} = (qav/2)\,\boldsymbol{n} = (q/2m)\,\boldsymbol{L}$$

と表せる。

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/rotation71.gif

磁性体

磁石になる物質は強磁性体，ならないもののうち個々の磁気モーメントが磁場に反発する性質をもつ物質は反磁性体，磁場の向きにそろう物質は常磁性体とよばれる。

多くの物質は反磁性体であり，限られた物質のみが常磁性を示す。さらに，磁場をゼロにしても自発磁化をもつ（磁石となる）物質が強磁性体である。

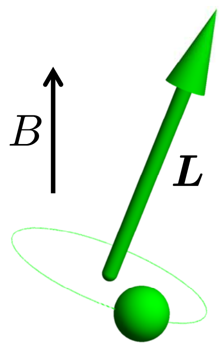
これらの性質は原子中の電子の配置に関する量子力学的な性質によって決められる。

反磁性の古典的な説明

通常，反磁性体では個々の磁気モーメントはランダムな向きを向いている。

反磁性体を磁場の中に置くことで磁場と反対方向の磁気モーメント（反磁性）が生じる性質は，本来量子力学により理解されるべき現象ではあるが，古典力学と電磁気学の範囲内でも以下のように説明することができる。

ラーモア反磁性：磁気双極子モーメントの歳差運動



磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもち角運動量 $\boldsymbol{L}$ で円運動する電荷 q が一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれたときの運動方程式は $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ で与えられる。すなわち，

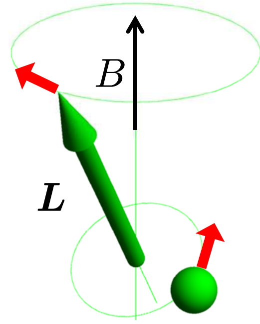
$$d\boldsymbol{L}/dt = (q/2m)(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}) = -(q/2m)(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{L})$$

が成り立つ。

一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ について，その先端が角速度 ω で右ネジを閉める向きに回転しているとき，回転軸方向を向いた角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると，先端の速度ベクトルは $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$ と表されるので，$d\boldsymbol{A}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$ の関係が成り立つ。すなわち上式は，角運動量 $\boldsymbol{L}$ で円運動するその中心軸が磁場 $\boldsymbol{B}$ に平行でないとき，$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{L} \neq 0$ なので，その軸自体が磁場の向きを軸として右ネジを閉める向きとは逆向きに回転（歳差運動）することを意味する。歳差運動の角速度ベクトル（ラーモア周波数）は，

$$\boldsymbol{\omega} = -(q/2m)\,\boldsymbol{B}$$

のように表される。



https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/rotation7tilted1.gif

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/precession71.gif

この歳差運動により，磁場の向きを軸として右ネジを閉める向きとは逆向きに流れる新たな微小円運動が追加される。この円電流は磁場の向きとは反対方向の磁気モーメント（反磁性）に相当する。

円電流 ΔI の大きさは以下のように表される。

$$\Delta I = q(\omega/2\pi) = (q/2\pi)(q/2m)B = q^2B/4\pi m$$

磁場の向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，荷電粒子を電子 $-e$ であるとして，この（半径 ρ の）円電流により生じる磁気モーメント $\Delta\mu$ は以下のように表される。

$$\Delta\boldsymbol{\mu} = -(\Delta IA)\boldsymbol{n} = -(e^2B/4\pi m)(\pi\rho^2)\boldsymbol{n} = -(e^2\rho^2/4m)\boldsymbol{B}$$

ランダムな向きの回転軸について平均すると，

$$\langle\Delta\boldsymbol{\mu}\rangle = \int\Delta\boldsymbol{\mu}\,dV/\int dV = -\int(e^2\rho^2/4m)\boldsymbol{B}\,dV/\int dV = -(e^2/4m)\boldsymbol{B}\int\rho^2dV/\int dV$$
$$= -(e^2\langle\rho^2\rangle/4m)\boldsymbol{B}$$

$\langle\rho^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle$ ， $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle = (3/2)\langle\rho^2\rangle$ なので，

$$\langle\Delta\boldsymbol{\mu}\rangle = -(e^2\langle r^2\rangle/6m)\boldsymbol{B}$$

ただし，r は電子の円運動の半径となる。

ボーア－ファン・リューエンの定理

古典的な統計力学では熱平衡にある電子集団のエネルギー分布は温度のみで決まり，磁場中に置かれても磁場には依存しないことから，磁化は生じない，という定理である。

この定理により，古典力学と電磁気学（に基づく統計力学）では原理的に磁性は説明できないことがわかる。量子統計力学（と特殊相対性理論）が必要となる。

このため，古典統計力学に基づく以下の常磁性の値は，上記の反磁性の値と，ちょうど打ち消し合う。

古典統計力学おける常磁性

統計力学では，温度 T の熱浴と接している系における，ある物理量の熱平衡状態での平均値は，エネルギーを ε としたボルツマン因子 $\exp[-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T]$ による重みの付いた平均値として決められる。

磁場 $\boldsymbol{B} = (0,0,B_z)$ 中に置かれた磁気モーメント $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x,\mu_y,\mu_z)$ を与える電子のエネルギーの磁場依存性は $-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B} = -\mu_zB_z$ と書ける。

ボーア－ファン・リューエンの定理から，平均をとる際の分子集団の位置と運動量がつくる相空間に関する積分について $\int\exp[-(\varepsilon_0-\mu_zB_z)/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma = \int\exp[-\varepsilon_0/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma = Z_0$ が成り立つ系で以下となる。

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = \int\boldsymbol{\mu}\exp[-(\varepsilon_0-\mu_zB_z)/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma/Z_0 \simeq \int\boldsymbol{\mu}[1+(\mu_zB_z)/k_{\mathrm{B}}T]\exp[-\varepsilon_0/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma/Z_0 = (e^2\langle r^2\rangle/6m)\boldsymbol{B}$$

$\because$ $\boldsymbol{\mu}$ はランダムな向きを向いているので，$\int\boldsymbol{\mu}\exp[-\varepsilon_0/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma = 0$ であり，また，

$$\int[\boldsymbol{\mu}(\mu_zB_z)/k_{\mathrm{B}}T]\exp[-\varepsilon_0/k_{\mathrm{B}}T]\,d\Gamma/Z_0 = (\langle\mu_x\mu_z\rangle/k_{\mathrm{B}}T,\ \langle\mu_y\mu_z\rangle/k_{\mathrm{B}}T,\ \langle{\mu_z}^2\rangle B_z/k_{\mathrm{B}}T)$$
$$= (\langle{\mu_z}^2\rangle/k_{\mathrm{B}}T)(0,0,B_z) = (e^2\langle r^2\rangle/6m)\boldsymbol{B}$$

$\because$ $\langle\mu_x\mu_z\rangle = \langle\mu_y\mu_z\rangle = 0$

$$\langle{\mu_z}^2\rangle = \langle(-e(r_xp_y-r_yp_x)/2m)^2\rangle = (e^2/4m^2)\langle{r_x}^2{p_y}^2 - 2r_xr_yp_xp_y + {r_y}^2{p_z}^2\rangle$$
$$= (e^2/4m^2)\,[(\langle r^2\rangle/3)(\langle p^2\rangle/3) + 0 + (\langle r^2\rangle/3)(\langle p^2\rangle/3)] = (e^2/9m)\langle r^2\rangle\langle p^2/2m\rangle \quad \text{等分配則より}$$
$$= (e^2/9m)\langle r^2\rangle(3k_{\mathrm{B}}T/2) = (e^2\langle r^2\rangle/6m)k_{\mathrm{B}}T$$

ただし，r は電子の円運動の半径である。

電磁誘導による反磁性

反磁性，すなわち磁場中に置かれることで磁場と反対方向に磁気モーメントが生じる性質は，電磁誘導に関するレンツの法則に従い，加えられた磁場による変化を打ち消す向きに生じた誘導磁場が，そのまま保たれた状態と考えることもできる。このとき，以下のように前述の歳差運動を考えた場合と同一の表式が得られる。

　電磁誘導により半径 ρ の円形回路に電流 ΔI が生じて磁場が誘導されるとする。この電流は荷電粒子 q の円運動による。この荷電粒子は円形回路に生じた誘導電場 E により回路に沿った力を受けて運動する。

ファラデーの法則から，誘導電場は，$2\pi\rho E = -\dfrac{d}{dt}(\pi\rho^2 B)$　　$\therefore E = -\dfrac{\rho}{2}\dfrac{dB}{dt}$

回路に沿った向きの荷電粒子の運動について，

$$m\frac{dv}{dt} = qE = -q\frac{\rho}{2}\frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad m\Delta v = \int_0^{\Delta v} m dv = -\int_0^B q\frac{\rho}{2}dB = q\frac{\rho}{2}B \qquad \therefore \frac{\Delta v}{\rho} = -\frac{qB}{2m}$$

この速さの変化分 Δv による円電流の大きさは $\Delta I = \dfrac{q\,|\,\Delta v\,|}{2\pi\rho} = \dfrac{q^2 B}{4\pi m}$ と表され，上記の歳差運動により生じる円電流の表式と一致する。

　量子力学に基づけば，例えばヘリウム原子の基底状態である1s軌道では，電子の軌道角運動量はゼロであり，回転運動する電子という古典的な描像は成り立たず，常磁性は生じないが，誘導磁場である反磁性は古典的に求めた表式のままの形で生じることが示される。すなわち，上記の古典論の場合のような常磁性と反磁性の打ち消しは起こらない。

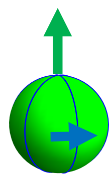
スピン磁気モーメント

磁性の由来としては，上記の様な原子内の軌道上で回転運動する電子の磁気モーメント以外に，スピン角運動量により生まれるスピン磁気モーメントがある。

　電子のスピン磁気モーメントは反磁性の磁気モーメントよりも圧倒的に大きい。ただし，基底状態にあるヘリウム原子のように，正負逆向きのスピンをもつ電子対により電子軌道が完全に満たされた閉殻構造をとる原子・分子では，スピン磁気モーメント（に加えて軌道角運動量による磁気モーメント）が電子同士で互いに打ち消されており，常磁性や強磁性は現れず，反磁性となる。すなわち，電子配置（不対電子の数）が物質の磁性を決める。

スピン角運動量

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/spin.gif



電子などの素粒子がもつ量子力学的な内部自由度である。古典的な描像である粒子の自転（スピン）に伴う角運動量に対応する。粒子が電荷をもつとき，磁気モーメントが生じる。なお，電荷をもたない中性子も，異なる電荷をもつクォークの複合粒子であり，スピン磁気モーメントをもつ。

　1/2 のスピンをもつ電子の振る舞いは，相対論的な量子力学の方程式であるディラック方程式により，スピン角運動量も含めて統一的に理解される。