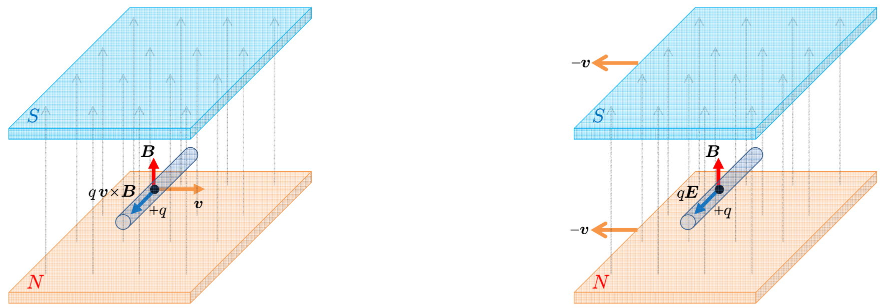
他 https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Electromagnetism/　　2019年4月16日，2016/8/30

戸田昭彦

電磁誘導の相対性

(a) 静止している磁石のつくる磁場 $\boldsymbol{B}$ 内を，一定速度 $\boldsymbol{v}$ で導線が移動するとき，ローレンツ力 $q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ により，導線に誘導起電力が生じる。

(b) 一方，静止した導線に対して，一定速度 $-\boldsymbol{v}$ で磁石（のつくる磁場）が移動するとき，(a)の場合と相対的な運動は同一であるので，このときにも起電力が生じるであろう。
ただし，導線は静止しており，運動する電荷に作用するローレンツ力には依らない起電力なので，新たな電場 $\boldsymbol{E}$ が導線内に生じているはずである。



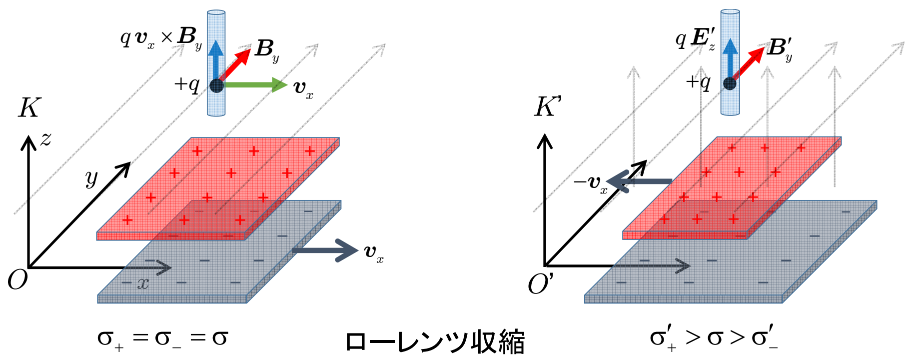
(a)　　(b)

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/soutaisei1.gif

「この電場 $\boldsymbol{E}$ はどのようにして生じているのであろうか？」

ここで，特殊相対性理論から予想されるローレンツ収縮が，光速度に比べて移動速度 $\boldsymbol{v}$ が十分遅い場合であっても重要な役割を果たす。

一様な磁場を作る装置として，下図のような平面電流（一定速度で移動する平面電荷）のつくる磁場（次々項［補]参照）を想定する。磁場のみが存在する状況として，等しい面密度の正負の平面電荷が存在し，負の平面電荷のみが定速 $\boldsymbol{v}_x$ で移動している下左図の状況(a)を考える。（導線と磁場の向きが上図とは異なっていることに注意）



(a)　　(b)

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/soutaisei2.gif

(a)の状況では，この磁場内を同じく定速 $\boldsymbol{v}_x$ で移動する導線内の電荷に作用する（平面電荷に垂直方向の）ローレンツ力としての起電力が生じる。

(b)の状況は，(a)の状況を移動する導線からみた状況である。この状況下では，負の平面電荷と導線が共に静止しており，正の電荷のみが $-\boldsymbol{v}_x$ で移動している。

特殊相対性理論によれば，運動している物体は移動方向にローレンツ収縮する。収縮に伴い電荷の面密度が変化する。そこで， 等しい面密度の正負の平面電荷が存在し，負の平面電荷のみが一定速度 $\boldsymbol{v}_x$ で移動することで一様な磁場がつくられている(a)の状況を，(b)のように移動する導線の立場から眺めたとき，ローレンツ収縮の効果で，正負の平面電荷の面密度に不釣り合いが生じることになる。このとき，面密度の差で決まる電場 $\boldsymbol{E}'_z$ が平面電荷に垂直に生じる。この電場が静止している導線内の電荷に作用し，(a)の状況下での磁場 $\boldsymbol{B}_y$ によるローレンツ力と同じ役割を果たす。

このように，運動する系から見た場合には，電場と磁場は独立なものではなく相互に変換され，電流（運動する電荷）のつくる磁場は運動する電荷の速度が十分遅い場合でも生じる電気力の相対論的な効果として理解される。特殊相対性理論の枠内において，電磁誘導の法則やローレンツ力も含めて，電場と磁場は統一して理解される。

以下，具体的な計算による確認。

(a) 一様な磁場内で運動する電荷に作用する力

平面電荷 σ_+，σ_- のうち，$\sigma_-(=\sigma)$ が速度 v_x で運動するとき，この平面電流のつくる一様な磁場 $B_y(z>0)$ は，次項の[補]より

$$B_y = \frac{1}{2}\mu_0\sigma v_x$$

一方，$\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$ であれば，電場は，

$$E_z = 0$$

一様な磁場内を，電荷 $+q$ が速度 v_x で運動するとき，+z軸方向に作用するローレンツ力が，

$$q\,v_x B_y = \frac{1}{2} q\,\mu_0\sigma(v_x)^2$$

(b) 電荷と共に v_x で移動する座標系から見たとき，σ'_+ が速度 $-v_x$ で運動し，σ'_- は静止することになる。そこで，相対論的効果であるローレンツ収縮により平面電荷の移動方向の長さが伸縮し，電荷密度（＝電荷/面積）に不釣り合いが生じる。

$$\sigma'_+ = \gamma\,\sigma \qquad \text{ただし，ローレンツ因子}\ \gamma = [1-(\frac{v_x}{c})^2]^{-1/2} \ >1$$

$$\sigma'_- = \frac{\sigma}{\gamma}$$

$$\Delta\sigma' = \sigma'_+ - \sigma'_- = \gamma\sigma - \frac{\sigma}{\gamma} = \gamma\sigma(1-\frac{1}{\gamma^2}) = \gamma\sigma(\frac{v_x}{c})^2$$

釣り合いが崩れた平面電荷による電場は

$$E'_z = \frac{\Delta\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\gamma\sigma}{2\varepsilon_0}(\frac{v_x}{c})^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\gamma\sigma(v_x)^2 = \frac{1}{2}\mu_0\gamma\sigma(v_x)^2$$

この電場による静電気力が+z軸方向に作用し，

$$q\,E'_z = \frac{\gamma}{2} q\,\mu_0\sigma(v_x)^2$$

これは，$\gamma \cong 1$（$v_x \ll c$）で状況(a)におけるローレンツ力に等しい。

一方で，σ'_+ のつくる一様な磁場 $B'_y(z>0)$ は，

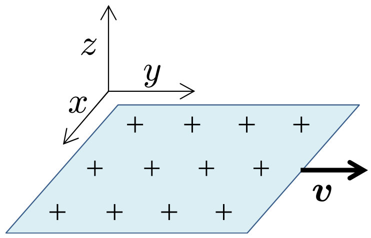
$$B'_y = \frac{1}{2}\mu_0\sigma'_+ v_x = \gamma B_y$$

なお，ローレンツ収縮により，平面電荷の分布は移動方向に密となり，一様ではなくなるが，この場合にも平面電荷のつくる電場の公式がそのまま適用できる。（ガウスの法則を用いた公式の導出には，一様な分布は必ずしも必要とされない。直交する２軸方向にそれぞれ一様であればよい。）

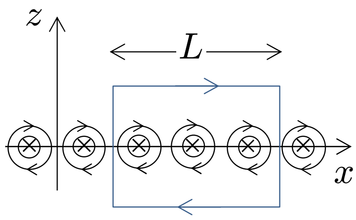
（参考書）太田浩一「電磁気学の基礎Ⅱ」東京大学出版会, 2012，第 15 章（ISBN: 4130626140）

［補］平面電流のつくる磁場：

平面電流＝定速 v で移動する面電荷（面密度 $+\sigma$ ）



・直線電流のつくる磁場の重ね合わせ。
・対称性より，磁場は x 軸に平行で x, y 軸方向に一様。
・z 軸方向には変化するかも知れない：$\boldsymbol{B}(z)$ 。
・ただし，$\boldsymbol{B}(z) = -\boldsymbol{B}(-z)$。



アンペールの法則から，

$$2LB = \mu_0 L\sigma v \qquad \therefore\ B = \frac{1}{2}\mu_0\sigma v$$

高さ z に依らず，面電流の上下で一様な磁場がつくられる。

https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/planar_current.gif

横から見た図