

(参考 1 G) 温度計の種類

1次温度計: 熱力学温度そのものの測定が可能な温度計。

どれも熱エネルギー $k_B T$ を単位として決められている。

2019年5月20日(世界計量記念日)から, 熱力学温度 T/K の定義も熱エネルギー $k_B T/J$ に基づく。

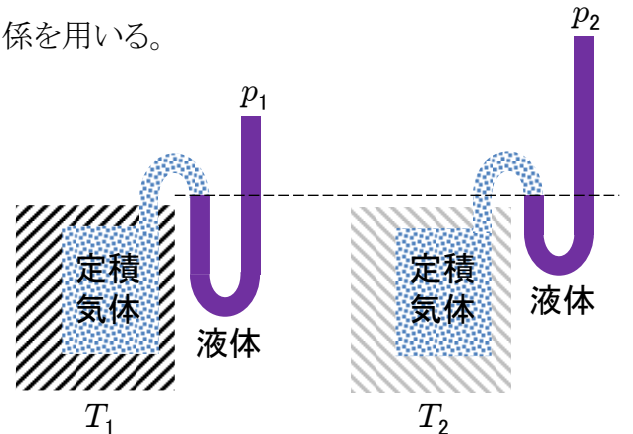
1. 定積気体温度計

一定体積に保たれた気体の圧力と熱力学温度との関係を用いる。

例) 理想気体の状態方程式

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{nN_A k_B T}{V} = \frac{k_B T}{v}$$

ただし, v は気体分子1個当たりの体積



<https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/cvvolumeT.gif>

2. 音響気体温度計

音速と熱力学温度との関係を用いる。

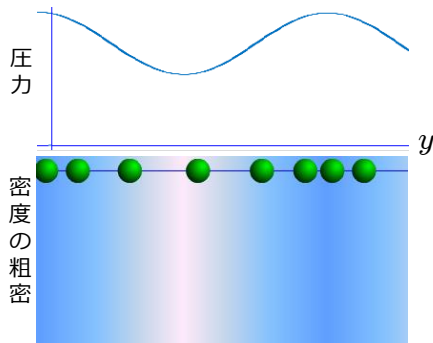
例) 理想気体 ($pV = nRT$) の音速 $v_{\text{sound}} = \left(\frac{K_S}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma N_A k_B T}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma k_B T}{m}\right)^{1/2}$

ただし, γ は比熱比 (= $\frac{5}{3}$ 単原子理想気体), M は気体の分子量, m は気体分子1個の質量

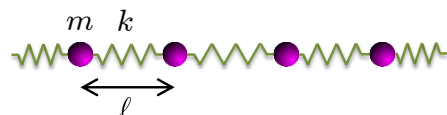
\therefore 密度 $\rho = \frac{nM}{V}$ であり, また断熱変化では, $pV^\gamma = A$ (定数) なので,

$$\text{体積弾性率 } K_S = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -V \frac{d(AV^{-\gamma})}{dV} = \gamma AV^{-\gamma} = \gamma p \Rightarrow v_{\text{sound}} = \left(\frac{V}{nM} \gamma p\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT}{M}\right)^{1/2}$$

<https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Figs/sound3.gif>



$v_{\text{sound}} = (K_S / \rho)^{1/2}$ と同様な関係の例:
自然長 l で係数 k のバネでつながれた
質量 m のおもりを伝わる連成振動の速さ
 $v_{\text{sound}} = [kl / (m / l)]^{1/2}$
ただし, m / l は, おもりの線密度



以下の(参考)音波の速さ 参照

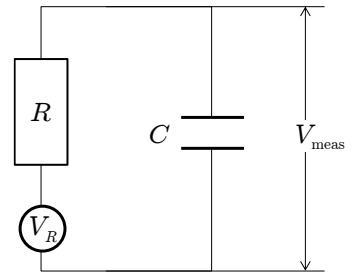
3. 熱雑音温度計(ジョンソンノイズ温度計)

電子の熱運動に起因して抵抗体に生じる熱雑音の強度と熱力学温度との関係を用いる。抵抗 R で発生する熱雑音電圧 V_R は、周波数範囲 Δf 当たり、次式のように表される。

$$V_R = (4k_B TR \Delta f)^{1/2}$$

(熱力学温度との関係の定性的な説明) 右図のような回路では、熱雑音電圧 V_R によりキャパシタに電荷が蓄えられる。容量 C のキャパシタのエネルギーは $C(V_{\text{meas}})^2 / 2$ と表されるが、エネルギー等配分の法則により、熱力学温度 T と以下のように関係づけられる。

$$E = \frac{1}{2} C (V_{\text{meas}})^2 = \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad V_{\text{meas}} = \left(\frac{k_B T}{C} \right)^{1/2}$$



(参考20) 参照

4. 放射温度計

物体の放射する電磁波の強さ(エネルギー)と熱力学温度との関係を用いる。

温度 T の電磁波の分光エネルギー密度 u_λ : $u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda$

→ プランクの法則

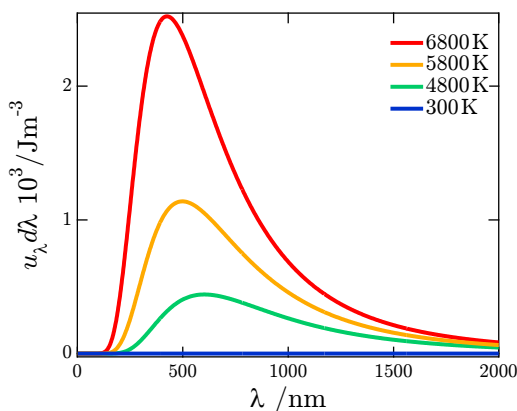
ただし、 λ : 波長、 c : 光速、 h : プランク定数

温度 T の輻射のピーク波長 λ_{max} : $\frac{hc}{\lambda_{\text{max}} k_B T} \cong 4.965 \dots \Rightarrow \lambda_{\text{max}} \propto \frac{1}{k_B T}$

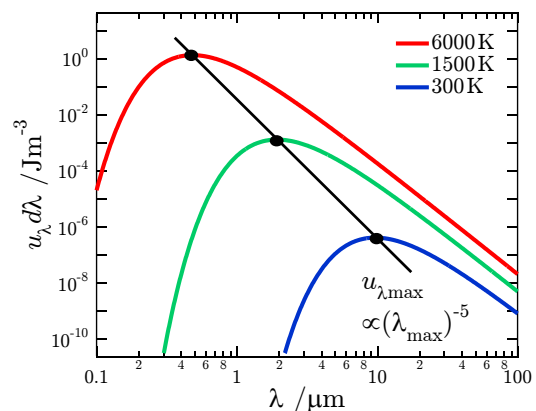
→ ウィーンの変位則

温度 T の電磁波の全エネルギー密度 u : $u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi^5}{15(hc)^3} (k_B T)^4 \propto T^4$

→ シュテファン・ボルツマンの法則



可視光: 400-700 nm



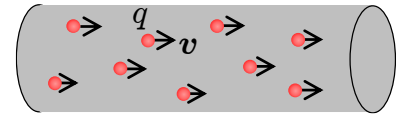
(参考20) 参照

2次温度計: 温度と共に変化する物理量について, 1次温度計による目盛り付け(校正)をおこなうことで温度計として利用できるもの。

1. 電気抵抗の温度変化

物質中で電流に寄与する電荷を担う粒子をキャリアーという。

キャリアーの電荷 q , 密度 n , 易動度 μ とするとき, 抵抗 $R \propto (nq\mu)^{-1}$



(a) 金属抵抗温度計 (例) 白金抵抗体

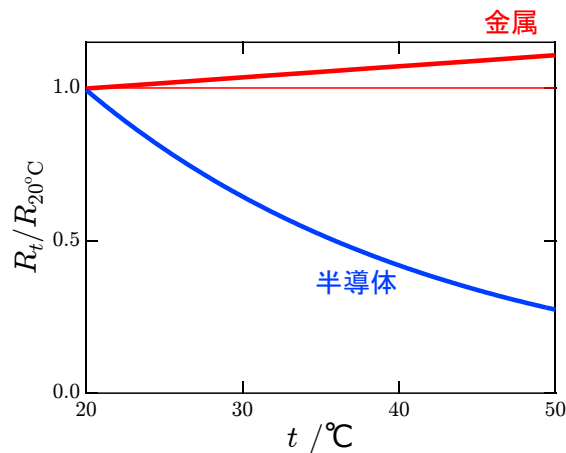
金属ではキャリアーは電子で, その数は室温付近ではあまり変化しない。原子の振動や金属中の不純物に電子が散乱されることにより生じる抵抗は温度の上昇と共に大きくなる(易動度 μ は温度の上昇と共に低くなる)。室温付近では, 抵抗は温度上昇と共にほぼ直線的に増加する。

$$R_t = R_0[1 + \alpha(t/^\circ\text{C})]$$

(b) 半導体抵抗温度計 (例) サーミスタ

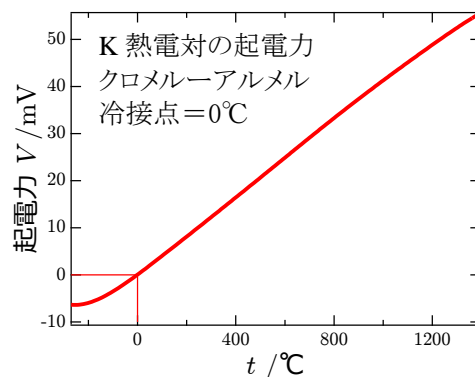
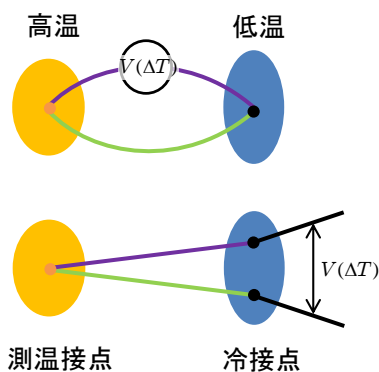
半導体ではキャリアーは電子や正孔で, その数(密度 n)は $\exp[-Q/k_B T]$ に比例し, 温度の上昇と共に増大する。そこで抵抗は温度の上昇とともに指数関数的に減少する。ここで, $Q = E_g/2$ は活性化エネルギーと呼ばれ, E_g は価電子帯と伝導帯のエネルギーギャップ(バンドギャップ)である。

$$R_T \propto \exp[+Q/k_B T]$$



2. 熱電対温度計

異なる種類の金属線の両端をつなぎ両接点に温度差を与えると, 起電力が生じる(ゼーベック効果)。そこで, 接点の一端(冷接点)の温度が分かれば, 起電力の値から他端の温度が分かる。

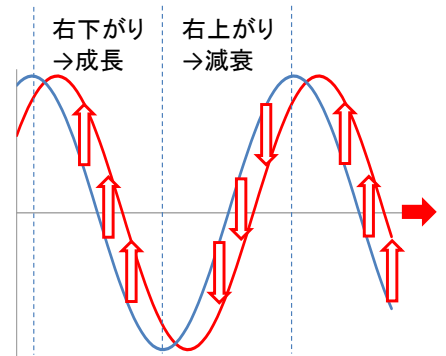


(参考) 音波の速さ(音速):

音波とは, 圧力と変位速度の振動が位相を揃えて伝播することによってつくられる波動である。

波の伝搬: どのようにして, 振動が波として伝搬するのか?

右図のように, 振動の勾配の正負が, 各点での振動の時間変化の正負(成長・減衰)を決めるとき, 波動が伝搬する。



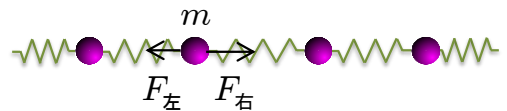
(例) 連成バネにおける波の伝搬

バネの力 F と, 錘の速度 v , の左右の差(勾配)が互いを強め(弱め)合うことで伝搬する波動

1) ニュートンの運動方程式:

$$F_{\text{右}} - F_{\text{左}} = m \frac{dv}{dt}$$

左右の力の差が, 錘の速度の時間変化をもたらす。

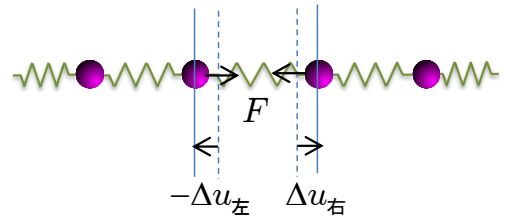


2) フックの法則:

$$F = k(\Delta u_{\text{右}} - \Delta u_{\text{左}}) \quad \text{両辺を時間で微分すると,}$$

$$\rightarrow \frac{dF}{dt} = k(v_{\text{右}} - v_{\text{左}})$$

左右の錘の速さの差が, 力の時間変化をもたらす。



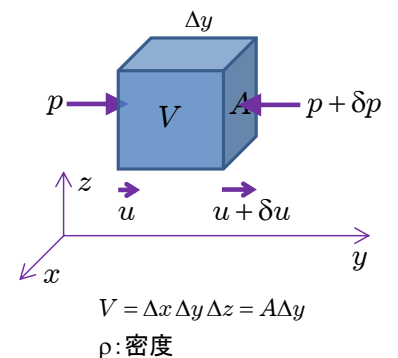
(音波) 圧力 p と変位速度 v の振動がつくる波動

体積 $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ の微小立方体について,

y 軸方向の変位を u_y , 変位の速さを $v_y = \frac{\partial u_y}{\partial t}$ とする。

1) Newtonの運動方程式 $\rho V \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\delta p A \quad \frac{A}{V} = \frac{1}{\Delta y}$ なので,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{圧力勾配が変位速度の時間変化をもたらす。}$$



2) 断熱体積弾性率 $K = -V \frac{\partial p}{\partial V} \rightarrow \frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta p}{K} = -\frac{p - p_0}{K}$

$$\delta V \equiv \delta u_y A = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y A = \frac{\partial u_y}{\partial y} V \rightarrow \frac{\delta V}{V} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

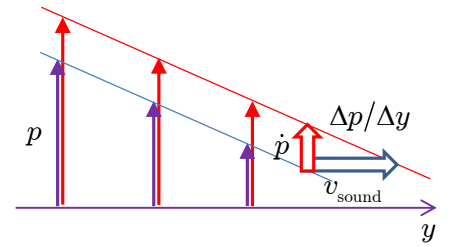
$$\therefore -\frac{p - p_0}{K} = \frac{\delta V}{V} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{時間微分することで, } -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{変位速度の勾配が圧力の時間変化をもたらす。}$$

勾配 $\frac{\partial p}{\partial y}$ は、各点での振動の時間変化 $\frac{\partial p}{\partial t}$ と、波動の伝搬速度 (音速) v_{sound} の比でもある。

$$\frac{\Delta p}{\Delta y} = -\frac{\dot{p}}{v_{\text{sound}}} \quad \frac{\Delta v_y}{\Delta y} = -\frac{\dot{v}_y}{v_{\text{sound}}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{sound}} = \frac{-\dot{p}}{(\Delta p/\Delta y)} = \frac{-\dot{v}_y}{(\Delta v_y/\Delta y)}$$



$$\Rightarrow (v_{\text{sound}})^2 = \frac{-\dot{p}}{(\Delta p/\Delta y)} \cdot \frac{-\dot{v}_y}{(\Delta v_y/\Delta y)} = \frac{\dot{v}_y}{(\Delta p/\Delta y)} \cdot \frac{\dot{p}}{(\Delta v_y/\Delta y)} = \frac{(\partial v_y/\partial t)}{(\partial p/\partial y)} \cdot \frac{(\partial p/\partial t)}{(\partial v_y/\partial y)} = \frac{1}{\rho} \cdot K$$

$$\therefore v_{\text{sound}} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}$$

また、圧力 p と変位速度 v_y の波動は位相を揃えて伝播することが、以下のように示される。

$$\begin{cases} v_y = A \cos[\omega t - ky] \\ p = B \cos[\omega t - ky + \phi] \end{cases} \quad \text{として} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{に代入すると、位相差 } \phi = 0 \text{ が確認できる。}$$

なお、1), 2)から以下のように、圧力と変位速度の振動は同じ波動方程式に従うことが分かる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{K}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -K \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{K}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

補) 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (v_{\text{sound}})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

一般解

$$u(y, t) = f(v_{\text{sound}} t + y) + g(v_{\text{sound}} t - y)$$

$$\therefore s \equiv v_{\text{sound}} t + y \text{ で, } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (v_{\text{sound}})^2 \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} = (v_{\text{sound}})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{平面波の例} \quad u = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(v_{\text{sound}} t - y)\right]$$

補) 圧力の振動により密度も振動する疎密波となる。

$$\therefore \delta(\rho V) = \text{一定} \Rightarrow V \delta\rho = -\rho \delta V \Rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta p}{K} \Rightarrow \delta \ln \rho = \frac{\delta p}{K} \Rightarrow \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{1}{K}(p - p_0)$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left[\frac{1}{K}(p - p_0)\right]$$