比形 Mercer 型定理と Tauber 型定理*

井上　昭彦　　北大理

1 Introduction

これは N. H. Bingham 氏との共同研究の紹介である。私は 1994 年秋から 1995 夏まで London の Bingham 氏の所に滞在する機会を得たが、その時共同で Fourier 変換に対する Mercer 型定理[1] を証明することができた ([BI1])。その研究では、最後の段階でぶつかった壁を、B. I. Korenblum の Beurling algebra に関するある古い結果を用いればよいことに気付いて、乗り越えることができたのだった。この Korenblum の結果は我々のその後の研究でも本質的な役割を果たすことになる。続いてこの結果を任意次数の Hankel 変換に拡張しようとして、局所化の方法というものを思いついた。これは単純な方法であったがその output は大きかった。我々は、[BI3] において、この方法を用いて Fourier 変換についての [BI1] の結果を改良すると同時に、予定通りこの結果を任意次数の Hankel 変換に拡張した。また [BI4] ではこの局所化の方法を用いて、絶対収束する積分変換に対する Mercer 型定理を望ましい形に拡張した (Drasin–Shea–Jordan の定理の拡張)。尚、[BI3] では、定式化しておくとよいと思われた比形 Mercer 型定理 (Ratio Mercerian Theorem)[2] という概念も導入した。ここまでは Mercer 型定理の研究である。最近ある種の算術和に対する Tauber 型定理を証明しようとしていて、突然、比形 Mercer 型定理を system に拡張すれば、Tauber 型定理[3]の証明に応用できることに気付いた。我々はこの方法により、Laplace 変換に対する Karamata[4] の Tauber 型定理と同等の Tauber 型定理を、広いクラスの非負値核積分変換に対して証明することができた ([BI5])。また Laplace 変換に対する de Haan の Tauber 型定理の類似物を、初めて (特別な積分変換でなく) あるクラスの積分変換に対して証明することもできた。[BI6] では、[BI5] の結果と (system を考えるという) アイデアを用いて、予定通り上で述べた算術和に対する Tauber 型定理を証明した (この解析数論の仕事に対する review については、A. Ivić [Iv] を見よ)。以上があらましである。この講演ではこれらのことについて紹介したいと思う。

まず Karamata による regular variation の概念を復習する。無限遠のある近傍 $[X,\infty)$ で定義された正値可測関数 $f:[X,\infty)\to(0,\infty)$ が「regularly varying with index ρ $(\in\mathbb{R})$」、あるいは簡単に $f\in R_\rho$ とは、次が成り立つことである[5]：

$$\forall\lambda>0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}=\lambda^\rho. \tag{1.1}$$

*日本数学会 2000 年度春季総合分科会　実関数論分科会特別講演

特に R_0 に属する関数、すなわち指数 ρ が 0 の regularly varying 関数は、slowly varying と呼ばれる。Slowly varying 関数は普通エル (ℓ, L etc.) という文字で表される。以下でも $\ell(\cdot)$ と書いたら、それは slowly varying 関数を表すものとする。簡単に分かるように次が成り立つ：

$$f \in R_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \sim x^\rho \ell(x) \quad (x \to \infty) \quad \text{for some } \ell \in R_0.$$

ここで '$\sim$' は比が 1 に行くことを意味する。関数 f が $f \in R_\rho$ であるとは、$f(x)$ は x^ρ に「近い」漸近挙動を持つ、ということを意味すると考えてよい。

例. 正の定数, $\log x$, $\log\log x$ などは slowly varying 関数である。x^2, $x^2 \log x$ などの関数は、regularly varying with index 2 である。

Tauber 型定理等の基本的な用語のここでの意味を説明するために、最も簡単な積分変換である算術平均 (即ち Cesàro C_1-mean) を例にとることにする。実数値関数 f は、$f \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ なるものとする。またこの算術平均の場合には $\rho > -1$ とする。この時

$$f(x) \sim x^\rho \ell(x) \qquad (x \to \infty) \tag{1.2}$$

は次を意味する：

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \sim x^\rho \ell(x) \frac{1}{\rho+1} \qquad (x \to \infty). \tag{1.3}$$

逆は必ずしも成り立たないが、もし f が Tauber 型条件と呼ばれる (例えば単調性などの) 適当な条件を満たせば、反対に (1.3) は (1.2) を意味する。主張 (1.2) $\Rightarrow$ (1.3) を Abel 型定理と言い、(1.3) + (Tauber 型条件 on f) $\Rightarrow$ (1.2) という主張を、Tauber 型定理と言う。さて、(1.2) と (1.3) を組み合わせるとただちに次が成り立つことに気付く：

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \sim Cf(x) \qquad (x \to \infty), \tag{1.4}$$

但し $C = 1/(1+\rho)$ である。実はこの逆の主張、「f とその算術平均の漸近挙動が等しいのは (1.2) の時に限る」、が成り立つ。即ち (1.4) がある $C > 0$ について成り立てば、ある $\rho > 0$ について $C = 1/(\rho+1)$ かつ $f \in R_\rho$ が成り立つ (Karamata, 1930)。このような主張を Mercer 型定理という。以上の事実の証明は、Bingham et al. [BGT, Ch. 1] を見よ。

Tauber 型定理は応用が広いので、その重要性を理解しやすい[6]。一方 Mercer 型定理の意義は、この段階では、「regular variation という仮定は便利な十分条件であるだけでなく必要条件でもある」ことを教えるという観念的なものであるように見える。しかし私がこの講演で特に強調したいのは、Mercer 型定理の観点は有用でもあるということである。

算術平均に対するこれらの主張と同様のことが、Laplace 変換に対しても成り立つ[7]。「いろいろな積分変換に対して同様のことを示せ」というのは素朴だが応用上重要な問題である。一般の積分変換の場合を定式化するためには、Mellin convolution の言葉[8]を用いるのが便利である (実は §2 以降で見るようにこれがしばしば証明の鍵を握る)。可測な関数 $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ に対し、その Mellin convolution $f * g$ を次で定義する[9]：

$$f * g(x) := \int_0^\infty f(x/t)g(t)dt/t \qquad (x > 0).$$

例. 算術平均に対しては、$k(x) := x^{-1} I_{(1,\infty)}(x)$ とおけば、$x^{-1}\int_0^x f(t)dt = k*f(x)$ と表すことができる。Laplace 変換に対しては、$k(x) := x^{-1}e^{-1/x}$ とおけば、変数変換 $x \mapsto x^{-1}$ を行い x で割った $x^{-1}\int_0^\infty e^{-t/x} f(t)dt$ を $k * f(x)$ と表すことができる。

与えられた可測な関数 $k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ に対し、その Mellin 変換 $\check{k}(z)$ を

$$\check{k}(z) := \int_0^\infty t^{-z} k(t)dt/t$$

で、ただしこの積分が収束する[10]ような $z \in \mathbb{C}$ に対して定義する。

例. 算術平均の積分核 $k(x) = x^{-1}I_{(1,\infty)}(x)$ に対しては、$\check{k}(z) = 1/(1+z)$ $(\Re z > -1)$ である。この関数が (1.3) に現れていることに注意せよ。また上の例で考えた Laplace 変換の積分核 $k(x) = x^{-1}e^{-1/x}$ に対しては、$\check{k}(z) = \Gamma(1+z)$ $(\Re z > -1)$ である。

もし (1.2) が成り立てば、少なくとも形式的には

$$\frac{k*f(x)}{f(x)} = \int_0^\infty \frac{f(x/t)}{f(t)} k(t)dt/t \to \int_0^\infty t^{-\rho}k(t)dt/t = \check{k}(\rho) \quad (x \to \infty)$$

が、従って

$$k * f(x) \sim x^\rho \ell(x) \check{k}(\rho) \qquad (x \to \infty) \tag{1.5}$$

が成立する。積分変換 $k * f$ に対しては (成り立つか否は別にして) この (1.2) $\Rightarrow$ (1.5) という主張が Abel 型定理であり、(1.5) + (Tauber 型条件 on f) $\Rightarrow$ (1.2) という主張が Tauber 型定理であると考えることができる。また、「もしある $C \neq 0$ について

$$k * f(x) \sim Cf(x) \qquad (x \to \infty) \tag{1.6}$$

であるならば、ある $\rho \in \mathbb{R}$ について、$f \in R_\rho$ かつ $C = \check{k}(\rho)$ が成り立つ」という主張が Mercer 型定理であると考えることができる。

2 Ratio Mercerian theorem

この節では [BI3] の比形 Mercer 型定理を、[BI5] で修正かつ改良した形で紹介する。

正値関数 $f : [X,\infty) \to (0,\infty)$ の「upper order」$\rho(f)$ は次で定義される：

$$\rho(f) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\log f(t)}{\log t}.$$

もし $f \in R_\rho$ ならば $\rho(f) = \rho$ であるので、$f \in R_\rho$ であることを示したい f に対し、予めその指数 ρ に当たるものを設定しておくために upper order を用いることができる。

比形 Mercer 型定理とは大体次のような主張である (正確には後述の Theorem 5.1 で $\#\Lambda = 1$ としたもの)：

定理 2.1 (比形 Mercer 型定理, [BI3, BI5]). 積分核 k^1, k^2 と関数 f に対する適当な仮定のもとで、

$$\frac{k^2 * f(x)}{k^1 * f(x)} \to C \neq 0 \qquad (x \to \infty) \tag{2.1}$$

は、$C = \check{k}^2(\rho)/\check{k}^1(\rho)$ と $f \in R_\rho$ を意味する。ここで、ρ は f の upper order である。

ここで鍵となる仮定は次の二つである：

$$k^0(t) := \check{k}^1(\rho)k^2(t) - \check{k}^2(\rho)k^1(t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{2.2}$$

とおくとき、$\sigma - \epsilon < \rho < \sigma + \epsilon$ なるある σ $(\in \mathbb{R})$ と ϵ (> 0) について、

$$\begin{cases} \rho \text{ is the unique zero of } \check{k}^0(z) = \check{k}^1(\rho)\check{k}^2(z) - \check{k}^2(\rho)\check{k}^1(z) \\ \text{in the strip } \sigma - \epsilon \leq \Re z \leq \sigma + \epsilon; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\exp\left(-\frac{\pi|t|}{2\epsilon}\right) \log|\check{k}^0(\sigma + it)| \to 0 \qquad (t \to \pm\infty). \tag{2.4}$$

Abel 型定理により、形式的には $f \in R_\rho$ は (2.1) with $C = \check{k}^2(\rho)/\check{k}^1(\rho)$ を意味することを注意せよ。上の比形 Mercer 型定理 はこの逆を主張する。この定理の証明のポイントは (1) 局所化の方法、(2) Korenblum の定理、の二つである。これについて説明する。

まず局所化の方法について説明する。二つの関数 E_1 と E_2 を

$$E_1(x) := I_{(1,\infty)}(x)x^{\sigma-\epsilon}, \qquad E_2(x) := I_{(0,1)}(x)x^{\sigma+\epsilon} \qquad (0 < x < \infty)$$

で定め、 $h(x) := E_2 * E_1 * f(x)$ とおく。すると h に対する次の二つの表現

$$h(x) = x^{\sigma-\epsilon}\int_0^x (E_2 * f)(t)dt/t^{1+\sigma-\epsilon} = x^{\sigma+\epsilon}\int_x^\infty (E_1 * f)(t)dt/t^{1+\sigma+\epsilon}$$

から、$x^{-\sigma+\epsilon}h(x)$ は単調増加であり、$x^{-\sigma-\epsilon}h(x)$ は単調減少であることが分かる (ここで f は非負と仮定されている)。このことより直ちに次の鍵となる評価が従う：

$$h(ux)/h(x) \leq \max(u^{\sigma-\epsilon}, u^{\sigma+\epsilon}) \qquad (0 < u < \infty,\ 0 < x < \infty). \tag{2.5}$$

さて、(2.1) から $E_2 * E_1 * k^2 * f(x)/E_2 * E_1 * k^1 * f(x) \to C$ $(x \to \infty)$、すなわち

$$\frac{k^2 * h(x)}{k^1 * h(x)} \to C \neq 0 \qquad (x \to \infty) \tag{2.6}$$

を示すことができる。簡単な Tauber 型の議論により $h = E_2 * E_1 * f \in R_\rho$ から $f \in R_\rho$ が従うので、(2.6) は問題が f から h のそれに帰着されたことを意味する。ここでよいのは、(2.5) という f に対しては望むべくもない評価を h が満たすことである。このように f の代わりに $E_2 * E_1 * f$ を考えるというのが、局所化の方法である。この方法によれば、考える Mellin 変換 (ここでは $\check{k}^0$) を $\sigma - \epsilon \leq \Re z \leq \sigma + \epsilon$ という局所化された場所だけで考えればよいので、こう呼ぶことにした[11]。

次に Korenblum の定理を適用する所について説明する。上に述べたように問題は、$h \in R_\rho$ 即ち $h(ux)/h(x) \to u^\rho$ as $x \to \infty$ for all $u > 0$ を示すことに帰着された。それには任意の数列 $x_n \uparrow \infty$ が、$h(ux_{n'})/h(x_{n'}) \to u^\rho$ $(\forall u > 0)$ なる部分列 $x_{n'}$ を持つことをいえばよい。しかし、Helly selection principle により $h(ux_{n'})/h(x_{n'})$ がある関数、それを $j(u)$ とおく、に収束するような部分列 $(x_{n'})$ を取ることはできる。そこで $j(u) = u^\rho$ が言えればよいのだが、(2.5), (2.6) そして $C = \check{k}^2(\rho)/\check{k}^1(\rho)$ (これは standard な方法で示せる) により、$j(\cdot)$ は次の線形積分方程式を満たすことは分かる：

$$k^0 * j(x) = 0 \qquad (0 < x < \infty). \tag{2.7}$$

ここで、k^0 は (2.2) で定義された積分核である。さて定義から $\check{k}^0(\rho) = 0$ が分かるが、これは u^ρ が (2.7) の解であることを言っている。さらにやはり定義から $j(1) = 1$ であるから、問題は (2.7) の一般解が、const. $\times\, u^\rho$ であることを言うことに帰着された。これを示すのに、Korenblum の結果[12]を用いるのであり、条件 (2.3) と (2.4) が必要になるのである。

Korenblum の定理を説明するために、正定数 α に対し

$$L(\alpha) := L^1(\mathbb{R}, e^{\alpha|x|}dx)$$

とおく。$L(\alpha)$ は convolution により可換 Banach 環になる。$K \in L(\alpha)$ に対しその Fourier 変換 $\hat{K}$ を

$$\hat{K}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} K(x)dx \qquad (|\Im z| \le \alpha)$$

で定義する。$\hat{K}(z)$ は $|\Im z| < \alpha$ で正則である。我々に必要なのは、次の結果である：

定理 (Korenblum, [K1, K2]). I を $L(\alpha)$ の closed ideal とする。$\hat{K}(z)$ $(K \in I)$ の $|\Im z| \le \alpha$ における共通零点は 1 点 z_0 だけであり、しかも z_0 は内点であるとする, i.e., $|\Im z| < \alpha$。さらに次を仮定する：

$$\sup_{K\in I} \limsup_{x\to\infty} \frac{\log|\hat{K}(x)|}{\exp(\pi x/2\alpha)} = \sup_{K\in I} \limsup_{x\to-\infty} \frac{\log|\hat{K}(x)|}{\exp(-\pi x/2\alpha)} = 0.$$

この時、$\hat{K}(z)$ $(K \in I)$ の零点 z_0 の位数の最小値を n_0 とすると、次が成り立つ：

$$I = \{K \in L(\alpha) : \hat{K} \text{ は } z_0 \text{ で少なくとも位数 } n_0 \text{ の零点を持つ。}\}.$$

こうして証明された比形 Mercer 型定理 (定理 2.1) の応用として、次を証明できる[13]：

定理 2.2 (Mercer 型定理 for Cosine 変換、[BI1, BI3]). 関数 f は $f \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ かつ $+\infty$ の近傍で $f(t) \downarrow 0$ as $t \to \infty$ とする。F_{c} をその Fourier cosine 変換とする：

$$F_{\mathrm{c}}(x) := \int_0^{\infty-} f(t)\cos tx dt \qquad (0 < x < \infty).$$

もし $\int_0^\infty f(t)dt \ne 0$ で、 さらに $C \ne 0, \sqrt{\pi/2}$ なる定数 C に対し

$$x^{-1}F_{\mathrm{c}}(1/x) \sim Cf(x) \qquad (x \to \infty) \tag{2.8}$$

ならば、$C > 0$ かつ $f \in R_\rho$ が成り立つ。ここで ρ は方程式 $\Gamma(1+\rho)\sin(-\frac{1}{2}\pi\rho) = C$ の区間 $(-1, 0)$ における唯一解である。

上で $\int_0^{\infty-}$ は広義積分 $\int_0^{\infty-} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M$ である。$f \downarrow 0$ であるからこの積分は収束する[14]。上の $C \neq \sqrt{\pi/2}$ という仮定 ($\rho = -\frac{1}{2}$ の場合にあたる) をはずすことはできない (cf. [BI1, §7])。この定理の比形 Mercer 型定理を用いた証明の outline は次の通りである。まず Mellin convolution の形に書くために $k(x) := x^{-1}\cos(1/x)$ とおく。すると上の条件 (2.8) は

$$k * f(x)/f(x) \to C \qquad (x \to \infty)$$

と書ける。ここで $B(x) := e^{-x}$ とおくと (2.9) より $B * k * f(x)/B * f(x) \to C$ すなわち

$$D * f(x)/B * f(x) \to C \qquad (x \to \infty) \tag{2.9}$$

を示すことができる。ただし $D(x) := B * k(x) = x/(1+x^2)$ とおいた。ここで気付くのは、 (2.9) の積分 $D * f$ と $B * f$ が絶対収束であることである。すなわち Laplace 変換を用いることで、条件収束積分の Mercer 型の問題が絶対収束積分の比形 Mercer 型の問題に変わった。そこで上の比形 Mercer 型定理を用いれば欲しい結果が得られる。

3 Application to Tauberian theorems

この節では、[BI5] で用いられた比形 Mercer 型定理に基づく Tauber 型定理の新しい証明法と結果について説明する。鍵となるアイデアは system を考えるというものである。

今我々が示したい Tauber 型定理は、k と f 及び ρ に対する適当な仮定のもとで、条件 (1.5) から (1.2) が出るという主張である。さて $\lambda > 1$ とすると (1.5) から

$$\frac{k * f(\lambda x)}{k * f(x)} \to \lambda^\rho \qquad (x \to \infty),$$

あるいは同じことだが

$$\frac{k_\lambda^2 * f(x)}{k^1 * f(x)} \to \lambda^\rho \qquad (x \to \infty), \tag{3.1}$$

が成り立つことが直ちに分かる。ただしここで、

$$k^1(x) := k(x), \quad k_\lambda^2(x) := k(\lambda x) \qquad (0 < x < \infty)$$

とおいた。この (3.1) はまさに上の (2.1) と同じ setting であり、従って比形 Mercer 型定理により $f \in R_\rho$ が言えるのではと、一瞬期待を抱く。もしこれが実際言えれば、Abel 型定理により (1.2) は簡単に出てくる。しかし、しばらくすると問題があることに気付く。簡単に分かるようにこの場合、

$$\check{k}^1(\rho)\check{k}_\lambda^2(z) - \check{k}_\lambda^2(\rho)\check{k}^1(z) = (\lambda^z - \lambda^\rho)\check{k}(\rho)\check{k}(z) \tag{3.2}$$

であるから、左辺の関数は無限の多くの零点 $z=\rho+i(2n\pi/\log\lambda)$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ を、$z=\rho$ 以外に、垂直な直線 $\Re z=\rho$ 上従って $\rho\in(\sigma-\epsilon,\sigma+\epsilon)$ となるようなすべての垂直帯状領域 $\sigma-\epsilon\le\Re z\le\sigma+\epsilon$ において、持つことになる。従って鍵となる条件 (2.3) が全く満たされないのである。

最近このトラブルを解消するうまい方法に気づいた。それは簡単に言えば、ただ一つの λ だけでなく複数の λ たちを考えよ、というものである。このことを見るために、$\lambda_1>1$ と $\lambda_2>1$ を $\log\lambda_2/\log\lambda_1$ が非有理数であるように取る。例えば $\lambda_1=2,\lambda_2=3$ でよい。すると、

$$\{\rho+i(2\pi n/\log\lambda_1):z\in\mathbb{Z}\}\cap\{\rho+i(2\pi n/\log\lambda_2):z\in\mathbb{Z}\}=\{\rho\}$$

である。このことは次のことを示唆する：もし、比形 Mercer 型定理をうまく拡張して積分変換の system に対するものを作れば、上に述べた筋書きで Tauber 型定理 (1.5) $\Rightarrow$ (1.2) を証明できるであろう。

実は定理 2.1 の証明と全く同様にして、次の system 版の比形 Mercer 型定理を証明することができる (正確な statement は後述の Theorem 5.1)：

定理 3.1 (比形 Mercer 型定理 (system 版), [BI5]). 積分核の族 k_λ^i $(i=1,2,\ \lambda\in\Lambda)$ と関数 f に対する適当な仮定のもとで、

$$\forall\lambda\in\Lambda,\qquad \frac{k_\lambda^2*f(x)}{k_\lambda^1*f(x)}\to C_\lambda\neq0\qquad(x\to\infty) \tag{3.3}$$

は、$C_\lambda=\check{k}_\lambda^2(\rho)/\check{k}_\lambda^1(\rho)$ $(\lambda\in\Lambda)$ と $f\in R_\rho$ を意味する。ここで、ρ は f の upper order である。

ここで仮定 (2.3) と (2.4) は、今度はそれぞれ次のように変わる：

$$k_\lambda^0(t):=\check{k}_\lambda^1(\rho)k_\lambda^2(t)-\check{k}_\lambda^2(\rho)k_\lambda^1(t)\qquad(0<t<\infty,\ \lambda\in\Lambda) \tag{3.4}$$

とおくとき、$\sigma-\epsilon<\rho<\sigma+\epsilon$ なるある $\sigma(\in\mathbb{R})$ と $\epsilon(>0)$ について、

$$\begin{cases}\rho\text{ is the unique common zero of }\{\check{k}_\lambda^0(z)=\check{k}_\lambda^1(\rho)\check{k}_\lambda^2(z)-\check{k}_\lambda^2(\rho)\check{k}_\lambda^1(z):\lambda\in\Lambda\}\\ \text{in the strip }\sigma-\epsilon\le\Re z\le\sigma+\epsilon;\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\forall\lambda\in\Lambda,\qquad \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2\epsilon}\right)\log|\check{k}_\lambda^0(\sigma+it)|\to0\qquad(t\to\pm\infty). \tag{3.6}$$

この定理を用いると、上に述べた筋書きで次の Tauber 型定理を証明することができる (正確な statement は後述の Theorem 5.2 で $\#\Lambda=1$ としたもの)：

定理 3.2 (非負核に対する Tauber 型定理, [BI5]). Korenblum の条件を満たす非負核 k の積分変換 $k*f$ に対しては、f に対する算術平均の場合と同じ Tauber 型条件で、主張 (1.5) $\Rightarrow$ (1.2) が成り立つ。

この定理のポイントは、f に対する Tauber 型条件がきつくないことである。Tauber 型定理を実際に適用しようとする時には、f に対する Tauber 型条件をチェックできるかど

うかがしばしば鍵になることを注意しておく。尚、この定理の非負核 k に対する条件は、普通は成り立つタイプのものである。特にこの定理は、算術平均に対するものや、Laplace 変換に対する Karamata の Tauber 型定理 ([BGT, Th. 1.7.6]) を含む。

我々はこの定理の一つの応用として、次を証明した：

定理 3.3 (算術和に対する Tauber 型定理, [BI6]). $\rho > 0$ とする。$f : [2, \infty) \to [0, \infty)$ について、(1.2) は

$$\sum_{n \le x} \sum_{p|n} f(p) \sim \frac{x^\rho \ell(x)}{\log x} \cdot \frac{\zeta(1+\rho)}{1+\rho} \qquad (x \to \infty) \tag{3.7}$$

を意味する。逆に f が単調増加ならば、(3.7) は (1.2) を意味する。

ここで p は素数を表す。Abelian part (1.2) $\Rightarrow$ (3.7) は既知の結果である (cf. De Koninck and Ivić [DI])[15]。上の算術和を考える motivation は次の通りである。解析数論において $g(n) := \sum_{p|n} f(p)$ の形の関数の漸近挙動を調べたいことがある。例えば $f(x) \equiv 1$ ならば、$g(n)$ は n の素因数の個数を表す (下の定理 4.2 を参照)。この定理では、$g(n)$ よりも扱いやすい $g(n)$ の算術平均の漸近挙動を問題にしているのである。この定理の証明では積分核 $k(x)$ として $I_{(1,\infty)}(x)[x]/x$ を考える[16]。

4 Tauberian theorems of de Haan type

§1 で見たように、単調な f の漸近挙動 (1.2) を、$\rho > -1$ の場合には f の算術平均の言葉で特徴付けることができる。さて、素朴な疑問として、境界の $\rho = -1$ 場合にも f の漸近挙動 (1.2) を f の算術平均の言葉で述べることが可能であろうか？ 答えは YES である。しかしそれには de Haan による π-variation という概念を必要とする。

定理 (de Haan [H]). $f \in L^1_{\mathrm{loc}}[0, \infty)$ とする。次の (4.1) は、(4.2) を意味する：

$$f(x) \sim x^{-1}\ell(x) \qquad (x \to \infty), \tag{4.1}$$

$$\textstyle\int_0^x f(t)dt \in \Pi_\ell \text{ with } \ell\text{-index } 1. \tag{4.2}$$

逆に、もし f が (例えば単調性などの) 適当な Tauber 型条件を満たせば、(4.2) は、(4.1) を意味する。

ここで、(4.2) に出てくる記号の意味は、次の通りである (cf. [BGT, Ch. 3])：

定義 (π-variation). $\ell \in R_0$, $c \in \mathbb{R}$ とする。この時、実可測関数 $g : [X, \infty) \to \mathbb{R}$ が、$g \in \Pi_\ell$ with ℓ-index c であるとは、次が成り立つことを言う：

$$\forall \lambda > 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{g(\lambda x) - g(x)}{\ell(x)} = c \log \lambda.$$

例. $\ell(x) \equiv 1$ に対し、$\log x \in \Pi_\ell$ with ℓ-index 1 である。実際、$\log(\lambda x) - \log x = \log \lambda$ であるから。また、一般の ℓ に対しては、上の主張 (4.1) $\Rightarrow$ (4.2) を用いれば多くの例を作ることができる。

[H] において、de Haan は Laplace 変換に対して同様の定理を証明した (cf. [BGT, Th. 3.9.1])。また Fourier 級数や Fourier 変換、Hankel 変換についても同様の定理が成り立つ[18]。こうして見てくると、π-variation は基本的な積分変換の「境界」の場合の Tauber 型定理を考える時に、自然に現れることが分かる。しかし、これらの de Haan タイプの Tauber 型定理は、特殊な積分変換の特殊な事情を用いてそれぞれ証明されており、どうして成り立つのかという仕組みがよく分からず、また一般の積分変換についても同じように成り立つのかもよく分からなかった。

ところが、比形 Mercer 型定理の system 版を用いると、この de Haan タイプの Tauber 型定理をあるクラスの積分変換に対して証明することができる。ポイントは (池原の Tauber 型定理のように) 条件を pole で記述することである。

定理 4.1 (de Haan type の Tauber 型定理, [BI5]). k は、Korenblum の条件を満たす積分核とする。k と f に適当な仮定をおく。特に、$z = \rho$ ($\in \mathbb{R}$) は、Mellin 変換 $\check{k}(z)$ の解析接続の留数 c ($\neq 0$) の simple pole であるとする。また、f は適当な Tauber 型条件を満たすとする。このとき、次の (4.4) は (4.3) を意味する:

$$f(x) \sim x^{\rho}\ell(x) \qquad (x \to \infty), \tag{4.3}$$

$$x^{-\rho}(k * f)(x) \in \Pi_{\ell} \text{ with } \ell\text{-index } c. \tag{4.4}$$

正確な statement は後述の Theorem 5.3 を見よ。弱い仮定の下で、Abel 型主張 (4.3) $\Rightarrow$ (4.4) も成り立つことを注意しておく。この定理は、算術平均や Laplace 変換に対する de Haan の定理を含む。算術平均の場合は、§1 の例で見たように $\check{k}(z) = 1/(1+z)$ であり、上の定理の $\rho = -1$, $c = 1$ に当たる。Laplace 変換の場合は、$\check{k}(z) = \Gamma(1+z)$ であり、この場合も 上の定理の $\rho = -1$, $c = 1$ に当たる。尚、この de Haan type の Tauber 型定理に対応する Mercer 型定理を証明することもできる ([BI5])。

定理 4.1 の k に対する Korenblum の条件は、通常は成り立つはずの条件といってよいが、しかしこれをチェックすることが難しいこともある。例えば我々は、§3 の算術和に対する Tauber 型定理の境界の場合を扱おうとして、積分核 $k(x) = I_{(1,\infty)}(x)[x]/x$ に対し、上の定理を適用することを考えてみた。この場合、$\check{k}(z+1) = \zeta(1+z)/(1+z)$ であり、この関数は $z = 0$ で留数 1 の simple pole を持つので、 上の定理で $\rho = 0$, $c = 1$ に当たるということになる。しかし、この場合に Korenblum の条件をチェックするためには、Riemann zeta 関数 $\zeta(z)$ の $1 - \epsilon < \Re z < 1 + \epsilon$ での振る舞い、特にここで零点を持たないことを言う必要があるので、すぐにあきらめた。ただ幸いにして、上の定理の類似物を、Korenblum の条件なしで示すことができた ([BI6])。その場合は、Korenblum の $L(\alpha)$ 理論の代わりに、Wiener の $L^1(\mathbb{R})$ 理論を用いる。また比形 Mercer 型定理を経ずに、system を考えるというアイデアだけを用いる。得られた定理 (後述の Theorem 5.4) は、やはり (4.4) が (4.3) を意味するという主張であるが、k に対する条件は弱くて済む代わりに、f に対する Tauber 型条件に柔軟性がなくなる。算術和の問題に関しては、$\zeta(z)$ は $\Re z = 1$ 上零点を持たない (Hadamard) という情報だけから k に対する条件はチェックでき、f に対する条件も幸いチェックでき、これでよろしいということになった。算術和に対して得られた結果は次の通りである。

定理 4.2 (算術和に対する Tauber 型定理 (境界の場合), [BI6]). $f : [2, \infty) \to [0, \infty)$ とする。$\ell \in R_0$ に対し $\tilde{\ell}(x) := \ell(x)/\log x$ とおく。すると次の (4.5) は (4.6) を意味する：

$$f(x) \sim \ell(x) \qquad (x \to \infty); \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \le x}\sum_{p|n} f(p) \in \Pi_{\tilde{\ell}} \quad \text{with } \tilde{\ell}\text{-index } 1. \tag{4.6}$$

逆に f が単調増加で ℓ が

$$\int^{\infty} \frac{\ell(t)e^{-\sqrt{\log t}}}{t} dt < \infty \quad \text{かつ} \quad \log x = O(\ell(x)) \tag{4.7}$$

を満たすならば、(4.6) は (4.5) を意味する。

例えば $\ell(x) = \log x$ は (4.7) を満たすが、$\ell(x) \equiv 1$ は満たさない。多分 f が単調減少でもよく条件 (4.7) もいらないがそれを完全に示すのは難しいであろう、とみている。

5 Statements

In this section, we shall give the precise statements of 定理 2.1, 3.1, 3.2, 4.1 etc. We follow the notation of [BGT].

Theorem 5.1 ([BI5]). *Let $\sigma \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, and $\rho \in (\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon)$. Let $k_\lambda^1 : (0, \infty) \to [0, \infty)$ $(\lambda \in \Lambda)$ and $k_\lambda^2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(\lambda \in \Lambda)$ be measurable kernels such that the Mellin transforms $\check{k}_\lambda^i$ $(i = 1, 2,\ \lambda \in \Lambda)$ converge absolutely in the strip $\sigma - \epsilon \le \Re \le \sigma + \epsilon$. We define k_λ^0 $(\lambda \in \Lambda)$ by (3.4). We assume (3.5), (3.6), and that $|\check{k}_\lambda^{0\prime}(\rho)| + |\check{k}_\lambda^{0\prime\prime}(\rho)| > 0$ for some $\lambda \in \Lambda$. Let f be non-negative and locally bounded on $[0, \infty)$, vanish in a neighbourhood of zero, have upper order ρ, and $f \in BD \cup BI$. Then (3.3) implies $C_\lambda = \check{k}_\lambda^2(\rho)/\check{k}_\lambda^1(\rho)$ $(\lambda \in \Lambda)$ and $E_1 * f \in R_\rho$ with $E_1(x) := I_{(1,\infty)}(x)x^{\sigma-\epsilon}$.*

Note that $E_1 * f \in R_\rho$ implies $f \in R_\rho$ under an adequate Tauberian condition on f.

Theorem 5.2 ([BI5]). *Let $\ell \in R_0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, and $\rho \in (\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon) \setminus \{\sigma\}$. Let k_λ $(\lambda \in \Lambda)$ be a system of non-negative measurable kerenels on $(0, \infty)$ such that all $\check{k}_\lambda(z)$ $(\lambda \in \Lambda)$ converge absolutely in the strip $\sigma - \epsilon \le \Re z \le \sigma + \epsilon$. We assume that $\check{k}_\lambda(z)$ $(\lambda \in \Lambda)$ have no common zeros in $\sigma - \epsilon \le \Re z \le \sigma + \epsilon$ and that*

$$\forall \lambda \in \Lambda, \qquad \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2\epsilon}\right) \log|\check{k}_\lambda(\sigma + it)| \to 0 \qquad (t \to \pm\infty). \tag{5.1}$$

Let f be non-negative, measurable and locally bounded on $[0, \infty)$, and vanish in a neighbourhood of zero. Then (1.2) implies

$$\forall \lambda \in \Lambda, \qquad k_\lambda * f(x) \sim x^\rho \ell(x) \check{k}_\lambda(\rho) \qquad (x \to \infty). \tag{5.2}$$

Conversely, (5.2) implies (1.2) if f satisfies one of the following:

$$f \text{ is eventually positive and } \log f \text{ is slowly decreasing} \tag{5.3}$$

$$f(x)/\{x^{\rho}\ell(x)\} \text{ is slowly decreasing} \tag{5.4}$$

$$\lim_{t\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\inf_{y\in[x,tx]}\frac{y^{-\tau}f(y)-x^{-\tau}f(x)}{x^{\rho-\tau}\ell(x)} \geq 0 \quad (\text{hence } = 0) \text{ for some } \tau\in\mathbb{R}, \tag{5.5}$$

Theorem 5.3 ([BI5]). *Let $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Let $\ell \in R_0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, and $\rho \in (\sigma-\epsilon, \sigma+\epsilon)\setminus\{\sigma\}$. Let $k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a measurable kerenel such that the Mellin transform $\check{k}(z)$ converges absolutely in the strip $\rho < \Re z \leq \sigma+\epsilon$. We assume the following:*

$$\begin{cases}\text{there exist } \lambda_1, \lambda_2 \in (0,\infty)\setminus\{1\} \text{ such that } \log\lambda_2/\log\lambda_1 \text{ is irrational}\\ \text{and that } (\lambda_j x)^{-\rho}k(\lambda_j x) - x^{-\rho}k(x) \geq 0 \text{ for } 0 < x < \infty \text{ and } j = 1,2;\end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases}\text{the analytic continuation of } \check{k}(z) \text{ is holomorphic in } \sigma-\epsilon \leq \Re z \leq \sigma+\epsilon\\ \text{except for a simple pole, with residue } c, \text{ at } z = \rho;\end{cases} \tag{5.7}$$

$$\exp\left(-\frac{\pi|t|}{2\epsilon}\right)\log|\check{k}(\sigma+it)| \to 0 \qquad (t\to\pm\infty); \tag{5.8}$$

$$\check{k}(z) \text{ has no zeros in } \sigma-\epsilon \leq \Re z \leq \sigma+\epsilon. \tag{5.9}$$

Let f be non-negative, measurable and locally bounded on $[0,\infty)$, and vanish in a neighbourhood of zero. We also assume that f satisfies either (5.3) or (5.4) or (5.5). Then (4.4) implies (4.3).

Theorem 5.4 ([BI6]). *Let $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ and $\ell \in R_0$. Let $-\infty < \sigma_1 < \rho < \sigma_2 < \infty$. Let $k : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a measurable kerenel such that the Mellin transform $\check{k}(z)$ converges absolutely in the strip $\rho < \Re z < \sigma_2$. We assume (5.6) and the following:*

$$\begin{cases}\text{the analytic continuation of } \check{k}(z) \text{ is holomorphic in } \sigma_1 < \Re z < \sigma_2\\ \text{except for a simple pole, with residue } c, \text{ at } z = \rho;\end{cases} \tag{5.10}$$

$$\check{k}(z) \text{ has no zeros on } \Re z = \rho. \tag{5.11}$$

Let f be non-negative, measurable and locally bounded on $[0,\infty)$, and vanish in a neighbourhood of zero. We also assume

$$\lim_{t\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\inf_{y\in[x,tx]}\frac{y^{-\rho}f(y)-x^{-\rho}f(x)}{\ell(x)} \geq 0 \quad (\text{hence } = 0). \tag{5.12}$$

Then (4.4) implies (4.3).

注

1. Mercer 型 (Mercerian) という形容詞は、J. Mercer が 1907 年に次の定理を証明したことに由来する。Mercer の定理:「$t > 0$ ならば、$a_n t + n^{-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-t) \to A \ (n\to\infty)$

は、$a_n \to A$ $(n \to \infty)$ を意味する」(cf. Pitt [P])。この Mercer は、半正定符号核の展開定理の Mercer と同じ人である。

2. 私はこれまで比較 Mercer 型定理と言っていたが、「比形」のほうが英語の「ratio」の意味に近いので、ここではこう呼ぶことにする。

3. Tauber 型 (Tauberian) という形容詞は、1897 年に A. Tauber がべき級数に関する Abel の定理の逆を、係数に対する $a_n = o(1/n)$ という条件のもとで証明したことに由来する。この命名は Hardy–Littlewood による。Carleson [C] は、この Tauber の定理をわずか 4 行でしかし完全に証明した後、次の様に書いている：「その後の非常に多くの深く重要な結果の元となったので、こんなに簡単な結果で Tauber の名は形容詞として残り不滅のものとなった。これは数学史上ほとんど唯一の事である」。Tauber 型定理の本格的な研究は、Hardy–Littlewood (1910–1920 頃) に始まる。この研究に直接刺激され、1932 年の Wiener の一般 Tauber 型定理の理論が生まれた (最初の論文は 1928 年)。Wiener の仕事は非常に新しいアイデアを含んでいたが、それは Banach 環の言葉で自然に記述される (Gelfand, 1940)。

4. ユーゴスラビア人 Karamata の仕事もまた Hardy–Littlewood の研究に刺激され生まれた (主に 1929–1933)。彼は、Hardy–Littlewood の Tauber 型定理を拡張する過程で、Pólya (1917) 等の仕事にヒントを得て、slowly varying 関数の概念に導かれ、これについて詳しい研究を行った。Karamata の人物像については、Tomić and Aljančić [TA] を見よ。

5. この (1.1) が、ただの定義でないことは、(1.1) の収束が（f の可測性の下で）実は自動的に $\lambda > 0$ についての広義一様収束になるという事実 (Karamata の一様収束定理) から示唆されよう（cf. [BGT, Th. 1.2.1 and 1.5.2]）。

6. 例えば Wiener の一般 Tauber 型定理が当時の数学者にショッキングであった最大の理由は、それから素数定理の新しい証明法が導かれたことであろう。

7. Laplace 変換に対する Abel–Tauber 型定理については [BGT, Th. 1.7.6] (Karamata) を、Mercer 型定理について [BGT, Th. 5.2.4] (Drasin) を見よ。

8. すなわち不変測度 dt/t を持つ（実数の乗法についての）局所コンパクト Abel 群 $(0, \infty)$ 上の harmonic analysis の言葉。

9. 断りがなければ、積分の収束の意味は絶対収束とする。しかし Fourier 変換などを考える時は広義積分の意味とすることもある。

10. ここでも、注 9 と同じ。尚、$\check{k}(z)$ の最大絶対収束域の形は、一般に $\mathbb{C}$ 内の垂直帯上領域になる。

11. 実はすでに Drasin–Shea [DS] や Jordan [J] による Mercer 型の定理の証明では、$E_1 * f$ や $E_2 * f$ という変換が用いられている (cf. [BGT, Ch. 5])。ただし彼らはこの積分変換を Mellin convolution の形ではなく、explicit に書き下している。従って局所化の方法は、ただそれらの変換を Mellin convolution の形に書いて、二つ一度に適用しただけのものにすぎない。しかし、Drasin–Shea–Jordan たちの Mercer 型定理の証明にこの方法を適用すると、長く複雑であった証明が簡単になると同時に、不必要な条件がはずれて自然な形になり適用範囲が広がる ([BI4])。

12.　Nyman–Korenblum の理論 [N, K1, K2] は、Wiener の $L^1(\mathbb{R})$ に関する理論の、$L(\alpha)$ における類似物である。可換 Banach 環 $L(\alpha)$ の closed ideal の記述に関する理論といってもよい。特に、Korenblum は、極大 ideal 空間 $\{|\Im z| \le \alpha\} \cup \{\infty\}$ の、∞ に対する primary ideal をすべて決定した (cf. [C], [Bor])。$L(\alpha)$ は、Beurling algebra のうちのいわゆる analytic case に入る。関数 u^ρ は変数変換 $u = e^t$ で指数関数 $e^{\rho t}$ になる。$L^1(\mathbb{R})$ の双対空間は有界関数しか含まないが、$L(\alpha)$ の双対空間は指数関数も含む。これが我々にとって、Wiener の $L^1(\mathbb{R})$ 理論ではなく $L(\alpha)$ 理論が必要になる理由である。Korenblum のこの方面の主論文 [K2] の英訳が出版されていないのは不思議である。
13.　[BI1] ではもっと一般に次数 $-\frac{1}{2} \le \nu \le \nu_0 = 0.8660252\ldots$ の Hankel 変換に対して、[BI3] では任意次数 $\nu \ge -\frac{1}{2}$ の Hankel 変換に対して、Mercer 型定理を証明している。指数 $\nu = -\frac{1}{2}$ ($\nu = -\frac{1}{2}$ resp.) の Hankel 変換が Fourier cosine (sine resp.) 変換である。$-\frac{1}{2} \le \nu \le \nu_0$ と $\nu > \nu_0$ の違いは、Mellin-convolution form での Hankel 変換の積分核 $k(x) := x^{-3/2} J_\nu(1/x)$ の Mellin 変換 (の解析接続) $\check{k}(z) = 2^{z+1/2}\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}z)/\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}z)$ が、実区間 $(-\nu - \frac{3}{2}, \nu + \frac{1}{2})$ 上で単調か否かの違いである。しかし局所化の方法によれば、このような global な条件は重要でない。
14.　Hankel 変換で指数 $\nu > -1/2$ の場合には、絶対収束積分の定式化により、f の単調性なしで (ただし弱い Tauber 型条件は仮定して) 類似の結果を示すことができる ([BI4])。この場合は [BI4] で拡張された Drasin–Shea–Jordan の定理を用いる。しかし cosine 変換の場合には条件収束積分を考えることが不可欠である。これは cosine 変換の積分核 $k(x) := x^{-1}\cos(1/x)$ の Mellin 変換の絶対収束域が、空集合であるからである。
15.　[DI] において「Tauber 型定理」が証明されているが、それは我々の notation では Mercer 型定理である。尚彼らのこの結果 [DI, Th. 4] は一般論 (Drasin–Shea の定理) を使うとより完全なものにすることができる ([BI6])。
16.　Tauberian part (3.7) $\Rightarrow$ (1.2) の証明の outline は次の通りである。まず素数定理を

$$\sum_{p \le x} 1 = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + R(x), \qquad R(x) = O(xe^{-\sqrt{\log x}})$$

の形で用いて

$$\sum_{n \le x} \sum_{p|n} f(p) = \sum_{p \le x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] = \int_2^x \frac{f(t)}{\log t} \left[\frac{x}{t}\right] dt + \int_{[2,x]} f(t) \left[\frac{x}{t}\right] dR(t)$$

と変形する。右辺の第 2 項は neglect できることを言い、また第一項については

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{f(t)}{\log t} \left[\frac{x}{t}\right] dt = k * \tilde{f}(x),$$

ただし

$$k(x) := \frac{[x]}{x} I_{(1,\infty)}(x), \qquad \tilde{f}(x) := \frac{f(x)}{\log x} I_{(2,\infty)}(x),$$

と見る。$\check{k}(z) = \zeta(1+z)/(1+z)$ ($\Re z > 0$) に注意して、この積分変換 $k * \tilde{f}$ に 定理 3.2 を適用することで (1.2) が得られる。
17.　次の定理は Boas [Bo, Question 7.18] に対し答えたものである。

定理 ([I1]). $a_n \downarrow 0$ とし、$F(\theta) := \sum_1^\infty a_n \cos n\theta$ $(0 < \theta < 2\pi)$ とおく。すると次の二つは同値である：

$$a_n \sim n^{-1}\ell(n) \qquad (n \to \infty),$$
$$F(1/\cdot) \in \Pi_\ell \text{ with } \ell\text{-index } 1.$$

算術平均に対する主張 (4.1) ⇔ (4.2) を見ると、この定理もそれほど奇抜とは思えないが、不思議なことにこの定理以前には、Fourier 変換や級数に対する Tauber 型定理に π-variation が自然に現れるということに気付いた人はいなかった。この方面のその後の進展については、[I2, I3], [BI2]、特に最近の菊地秀行君 (北大) との共著 [IK] を見よ。尚、この定理の証明の鍵は、条件収束性による困難を回避するために Laplace 変換を用いることである (定理 2.2 の証明の outline を参照)。1995 年の始めに Bingham 氏が「同じ方法で cosine 変換に対する Mercer 型定理も証明できるのではないか」と語った時、ここで述べた研究が始まった。

参考文献

[BGT] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, Regular variation, 2nd edn, Cambridge Univ. Press, 1989; 1st edn, 1987.

[BI1] N. H. Bingham and A. Inoue, The Drasin–Shea–Jordan theorem for Fourier and Hankel transforms, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 279–307.

[BI2] N. H. Bingham and A. Inoue, Abel–Tauber theorems for Hankel transforms, in *Trends in Probability and Related Analysis* (N. Kono and N. R. Shieh, eds), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 83–90.

[BI3] N. H. Bingham and A. Inoue, Ratio Mercerian theorems with applications to Hankel and Fourier transforms, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 626–648.

[BI4] N. H. Bingham and A. Inoue, Extension of the Drasin–Shea–Jordan theorem, J. Math. Soc. Japan (3) **52** (2000), 545–559.

[BI5] N. H. Bingham and A. Inoue, Tauberian and Mercerian theorems for systems of kernels, J. Math. Anal. Appl. (1) **252** (2000), 177–197.

[BI6] N. H. Bingham and A. Inoue, Abelian, Tauberian, and Mercerian theorems for arithmetic sums, J. Math. Anal. Appl. (2) **250** (2000), 465–493.

[Bo] R. P. Boas, Integrability theorems for trigonometric transforms, Springer-Verlag, 1967.

[Bor] A. A. Borichev, Beurling algebras and the generalized Fourier transform, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996), 431–480.

[C] L. Carleson, Wiener's Tauberian theorem, in *The Legacy of Norbert Wiener: A Centennial Symposium* (D. Jerison et al., eds), Proc. Sympos. Pure Math., 60, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 65–70.

[DI] J. M. De Koninck and A. Ivić, Arithmetic characterization of regularly varying functions, Ricerche Mat. **44** (1995), 41–64.

[DS] D. Drasin and D. F. Shea, Convolution inequalities, regular variation and exceptional sets, J. Analyse Math. **29** (1976), 232–293.

[H] L. de Haan, An Abel–Tauber theorem for Laplace transforms, J. London Math. Soc. (2) **13** (1995), 537–542.

[I1] A. Inoue, On Abel–Tauber theorems for Fourier cosine transforms, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 764–776.

[I2] A. Inoue, An Abel–Tauber theorem for Fourier sine transforms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 303–309.

[I3] A. Inoue, Abel–Tauber theorems for Fourier–Stieltjes coefficients, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 460–480.

[IK] A. Inoue and H. Kikuchi, Abel–Tauber theorems for Hankel and Fourier transforms and a problem of Boas, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 577–596.

[Iv] A. Ivić, On summatory functions of additive functions and regular variation, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 71(85) (2002).

[J] G. S. Jordan, Regularly varying functions and convolutions of functions with real kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **194** (1974), 177–194.

[K1] B. I. Korenblum, On a normed ring of functions with convolution, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) **115** (1957), 226–226 (in Russian).

[K2] B. I. Korenblum, A generalization of Wiener's Tauberian theorem and harmonic analysis of functions with rapid growth, Trudy Moskov. Mat. Obsc. **7** (1958), 121–148 (in Russian).

[N] B. Nyman, On the one-dimensional translation group and semigroup in certain function spaces, Thesis, Uppsala University, 1950.

[P] H. R. Pitt, Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958.

[TA] M. Tomić and S. Aljančić, Remembering Jovan Karamata, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **48** (62) (1990), 1–6.