測度と積分

広島大学理学部数学科解析学 A 講義ノート

岩田耕一郎

2004 年 10 月 7 日

目 次

1　概略–定義域の分割から値域の分割への転換

積分とは、大ざっぱに言うと関数の値を長さ、面積、体積などにより重みを付けて連続的に足しあわせる事である。今、“連続的に” という言葉を不用意に使ったが、ここがくせ者である。Riemann 積分においては、関数の定義域を部分区間などへ分割し Riemann 和を定義し、分割を細かくする極限移行を経由して、連続的な足しあわせを実行していたのである。これで一応閉じた世界ができあがるわけで、happy!と言いたいところだが現実は甘くない。例えば次の定理を Riemann 積分の世界にとどまって見通しよく証明するのは難しい。

f_n を区間 $[0,1]$ 上の連続関数列で次を満たすものとする。

$$\exists M < +\infty \text{ s.t. } |f_n(x)| \le M \,\forall n \in \mathbb{N} \,\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \,\forall x \in [0,1]$$

このとき数列 $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ は 0 に収束する。

記号

$\mathbb{Z}$ 整数全体、$\mathbb{N}$ 正の整数全体、$\mathbb{R}$ 実数全体、$\mathbb{Q}$ 有理数全体

状況を打開するには、視点を転換する必要があった。与えられた関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に応じて分割をとるのである。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して次のような集合全体を考える。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : (k-1)/2^n \le f(x) < k/2^n\} \ k \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

等分割されているのは、定義域でなくて値域の方である。上にでてきた集合たちは番号 k が異なれば共通部分を持たない。さて長さ、面積、体積などには加法性という共通点がある。即ち、ある領域を共通部分を持たない部分に分けたとき、全体の面積は各部分の面積の和になる等である。この性質を抽象化して測度という概念が生じる。

しかしながら、これは一方で数学における闇の世界を露呈させたのである。例えば $\mathbb{R}^2$ のすべての部分集合の面積をはかることができるなら話は簡単なのだが、そうではないので面積をはかることができる集合達を規定する必要がでてくる。ところがその規定というのがなかなか正体をつかみにくい代物だから厄介なのである。

1.2 定義. $\mathcal{B}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族とする。それが次の条件を満たすとき、$\mathcal{B}$ は σ-**加法族**(σ-field) をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$
(ii) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$ （A^c は A の補集合を表す。）
(iii) $A_n \in \mathcal{B} \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

(iii) において合併 (union) の対象となるのは <u>可算無限個</u>(countably infinite) の集合達であることを注意してほしい。以後、“$\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族である” という表現を使う。

既にふれたように面積など内容豊富なもの扱うには量を測る対象としての $\mathcal{B}$ はある程度絞り込む必要がある。そこで開集合や閉集合など重要なものだけを取り込むというスタンスになることを後の節で解説する。

記号

$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.3 定義. $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族 $\mathcal{B}$ と関数 $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ について次の条件が成り立つとき、$(\mathcal{B}, \mu)$（定義域 $\mathcal{B}$ を省略することも多い）は $\mathbb{R}^d$ 上の**測度**(measure) であるという。

(i) $\mathcal{B}$ は σ-加法族をなす
(ii) $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{B}$（$+\infty$ も許す）$\mu(\emptyset) = 0$
(iii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) においては $+\infty$ に発散する場合も許す。性質 (iii) を σ-**加法性**(σ-additivity) という。

今の段階では次のことを記憶にとどめて貰いたい。

予告

$\mathbb{R}^2$ 上で $\mathcal{B}$ としては面積確定な集合をすべて含むものが設定できてかつ A を長方形とするとき $\mu(A) =$ 縦 $\times$ 横 となる測度 μ が一意的に存在する。これが 2 次元ルベーグ測度 (Lebesgue measure) と呼ばれるものである。

前提

以下、$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

披積分関数となるのは (1.1) で提示した各集合が σ-加法族 $\mathcal{B}$ に属するものたちである。

1.4 定義. 次の条件を満たす関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}$-**可測**(measurable) であるという。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

このとき f を $\mathcal{B}$-**可測関数**(measurable function) と呼ぶ。一方 σ-加法族 $\mathcal{B}$ に属する集合は $\mathcal{B}$-**可測集合**(measurable set) と呼ばれる。

1.5 定義. 次の条件を満たす関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-**単関数**(simple function) と呼ぶ。

$\mathcal{B}$-可測、$-\infty, +\infty$ という値はとらない、像 $f(\mathbb{R}^d) = \{f(x)\,; x \in \mathbb{R}^d\}$ は有限集合

記号

関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\mathrm{Image}\, f := f(\mathbb{R}^d)$, $f^{-1}\{y\} := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = y\}$

集合 $f^{-1}\{y\}$ は y の g による逆像 (inverse image あるいは preimage) と呼ばれる。論理的には、先に進む前に次を確かめておく必要がある。

$$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}\ \mathcal{B}\text{-可測} \Rightarrow f^{-1}\{y\} \in \mathcal{B}\ \forall y \in \mathbb{R}$$

これは量 $\mu(f^{-1}\{y\})$ が定義可能であることにつながるのだが先を急ごう。

記号

関数 $f,\, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し条件 $g(x) \le f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$ を $g \le f$ と表記する。

1.6 定義. 関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値（$+\infty$ の値をとることも許す）かつ $\mathcal{B}$-可測なものとする。つぎで定義される量（$+\infty$ も許す）を f の μ についての**積分**(integral) と言う。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu := \sup\{\sum_{y\in\mathrm{Image}\,g} y\mu(g^{-1}\{y\})\,;g\text{ 非負値 }\mathcal{B}\text{-単関数}, g\le f\}$$

$g \le f$ なる非負値 $\mathcal{B}$-単関数 g にたいして

$$\sum_{y\in\mathrm{Image}\,g} y\mu(g^{-1}\{y\})$$

は Riemann 積分で言うところの不足和に対応するものである。またそのような g についての上限は、下積分に対応しているのであるが、f の $\mathcal{B}$-可測性と μ の σ-加法性によりこれが自動的に積分の定義となってしまうところが測度論的な積分の長所である。ここで、感じをつかむために演習問題を解いてもらおう。

1.7 演習問題. 単関数の数列版を単純数列と呼ぼう。すなわち b_n が単純数列であるとは

b_n は $-\infty$, $+\infty$ の値はとらない。像 $\{b_n\,;n\in\mathbb{N}\}$ は有限集合。

a_n を非負値の数列とする。次を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,;b_n\text{非負値の単純数列}, b_n \le a_n \forall n\}$$

数列の話がでたついでに正項級数および級数の絶対収束性について復習をしておこう。

(i) 正項級数にたいして $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_n \sum_{k=1}^{n} a_k$ （$+\infty$ も許す）
(ii) 絶対収束級数は収束する。
(iii) 収束する優級数が存在するなら絶対収束する。

測度論的な積分は絶対収束の世界における産物である。関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つことを思い出そう。

$$f(x) = \max\{f(x),0\} - \max\{-f(x),0\},\ |f(x)| = \max\{f(x),0\} + \max\{-f(x),0\}\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

先に進む前に次を確かめておく必要がある。

$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}$-可測 $\Rightarrow$ $|f|$, $\max\{f,0\}$, $\max\{-f,0\}$ 非負値 $\mathcal{B}$-可測

1.8 定義. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測なものとする。それが次の条件を満たすとき、f は μ-**可積分**(integrable) であるという。

$$\int_{\mathbb{R}^d}\max\{f,0\}\,\mu<+\infty,\ \int_{\mathbb{R}^d}\max\{-f,0\}\,\mu<+\infty.$$

μ-可積分であるときつぎで定義される量を f の μ についての積分と言う。

$$\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu:=\int_{\mathbb{R}^d}\max\{f,0\}\,\mu-\int_{\mathbb{R}^d}\max\{-f,0\}\,\mu.$$

実は次が成り立つので次の節以降はこれが可積分性の定義となる。

$\mathcal{B}$-可測関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ が μ-可積分であるための必要十分条件は

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f|\,\mu<+\infty.$$

$(\mathcal{B},\mu)$ を 2 次元ルベーグ測度とするとき次が成り立ち Riemann 積分と結びつく。

連続関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して
(i) f は $\mathcal{B}$-可測である。
(ii) f の広義積分が絶対収束する $\Leftrightarrow$ f が μ-可積分
(iii) μ-可積分なとき、広義積分と $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}f\,\mu$ は一致する。

測度論的な積分の真価のひとつはルベーグの収束定理 (Lebesgue dominated convergence theorem) と呼ばれるものである。

f を $\mathbb{R}^d$ 上の μ-可積分関数、f_n を $\mathbb{R}^d$ 上の μ-可積分関数列で次を満たすものとする。

$$\exists g\ \mu\text{-可積分 s.t. } |f_n(x)|\le g(x)\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall x\in\mathbb{R}^d,\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,\forall x\in\mathbb{R}^d$$

このとき数列 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu$ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu$ に収束する。

1.9 例. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を有界連続関数とする。このとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{n}{n^2x^2+1}\,dx \text{ は } n\to\infty \text{ の極限で } \pi f(0) \text{ に収束する。}$$

証明. 変数変換により与えられた積分は次に等しい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x/n)}{x^2+1}\,dx$$

関数 f は連続なので、

$$\lim_{n\to\infty} f(x/n)/(x^2+1) = f(0)/(x^2+1)\,\forall x \in \mathbb{R}.$$

関数 f は有界なので、$\exists M < +\infty$ s.t. $|f(y)| \le M\ \forall y \in \mathbb{R}$. $g(x) := M/(x^2+1)$ とおくと

$$\text{関数 } g \text{ は可積分かつ } |f(x/n)/(x^2+1)| \le g(x)\,\forall n \in \mathbb{N}\,\forall x \in \mathbb{R}.$$

従ってルベーグの収束定理が適用できる。極限値は $\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)/(x^2+1)\,dx = \pi f(0)$ である。 □

級数の場合に関して演習問題を解いてもらおう。

1.10 演習問題. a_{mn} を数列で次を満たすものとする。

$$\exists b_m \text{ s.t. } |a_{mn}| \le b_m\,\forall m\,\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m < +\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0\,\forall m \in \mathbb{N}$$

このとき $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ は $n \to \infty$ の極限で 0 に収束することを示せ。

2 単関数の積分

この節では単関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

関数の可測性については定義 1.4 で規定したとおりだが、状況に応じて使いやすい形が違うのでいろいろ言い換えてみよう。

2.1 補題. 関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ について以下の 4 条件は同値である。
(i) f は $\mathcal{B}$-可測である。
(ii) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ge a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$
(iii) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \le a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$
(iv) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$

証明. (i) と (ii) の同値性は以下の関係と定義 1.2(ii) から分かる。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} \text{ と } \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ge a\} \text{ は互いに他方の補集合}$$

条件 (i) が成り立つなら前者は $\mathcal{B}$ に属し、条件 (ii) が成り立つなら後者は $\mathcal{B}$ に属するからである。(iii) と (iv) の同値性についても同様に議論できる。次に条件 (ii) が成り立つと仮定して、条件 (iv) が成り立つことを導こう。キーとなるのは以下の関係である。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ge a + 1/n\} \tag{2.2}$$

条件 (ii) のもとでは、(2.2) 右辺の各集合は $\mathcal{B}$ に属する。それらの可算合併は、定義 1.2(iii) により、$\mathcal{B}$ に属する。従って、条件 (ii) から条件 (iv) が導かれる。以下の関係

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \le a - 1/n\}$$

を使って、条件 (iii) から条件 (i) を導くことも同様に議論できる。

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & \Leftrightarrow & \text{(ii)} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{(iii)} & \Leftrightarrow & \text{(iv)} \end{array}$$

という論理の循環図式ができあがったので、4 条件は同値である。 □

2.3 演習問題. (2.2) を証明せよ。

ここでちょっとしたトリックにふれる。

2.4 補題. (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}$.
(ii) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{B}$.
(iii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

証明. 定義 1.2(i), (ii) により $\mathbb{R}^d = \emptyset^{\mathrm{c}} \in \mathcal{B}$ である。(ii) 前半を示すのに使うトリックは

$$A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n = \emptyset\ n \ge 3$$

とおくことである。このとき $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$ であるから、定義 1.2(iii) により

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

(iii) を示すには集合演算のルールを使う。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)^{\mathrm{c}}\Big)^{\mathrm{c}}$$

定義 1.2(ii), (iii) を使うと、$A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$ という仮定のもと右辺が $\mathcal{B}$ に属することが導かれる。(ii) 後半を (iii) から導くのに使うトリックは

$$A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n = \mathbb{R}^d\ n \ge 3$$

とおくことである。 □

2.5 系. 関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathcal{B}$-可測なら、$\{x \in \mathbb{R}^d : a \le f(x) < b\} \in \mathcal{B}\ \forall a < \forall b$ である。

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : a \le f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ge a\}$ を使う。右辺の各集合は補題 2.1 により $\mathcal{B}$ に属し、共通部は補題 2.4(ii) により $\mathcal{B}$ に属する。 □

2.6 補題. $A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. **有限加法性**(finite additivity)

証明. 補題 2.4 の証明と同じトリックを使って、定義 1.3(iii) から結論を引き出す。 □

約束

以後、測度の σ-加法性というときは有限加法性も込める。

2.7 定義. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負値 $\mathcal{B}$-単関数とする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu := \sum_{y \in \mathrm{Image}\,f} y\mu(f^{-1}\{y\}) \quad \text{値としては} +\infty \text{も許容}$$

もし $0 \in \mathrm{Image}\,f$ かつ $\mu(f^{-1}\{0\}) = +\infty$ の場合にはそれらの積は 0 と約束をしておく。

約束および警告

$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ における加法および乗法を $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ にまで拡張しておこう。問題なのは 0 と ∞ の積であるがこれを 0 と約束する。重要なのは分配則

$$a(x+y) = ax + ay \ \forall a \forall x \forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

が生き残るところである。だが調子に乗って $\infty - \infty = (1-1)\infty = 0\infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。分配法則の運用は慎重になる必要がある。

2.8 補題. 非負値 $\mathcal{B}$-単関数の積分は非負であり、恒等的に値 0 をとる関数の積分は 0 である。

証明. 定義 2.7 から直ちに分かる。 □

2.9 補題. $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{Image}\,g$ が有限集合であるような関数とする。このときその $\mathcal{B}$-可測性は条件 $g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \ \forall y \in \mathrm{Image}\,g$ と同値である。

証明. 論理図式 g $\mathcal{B}$-可測 $\Rightarrow g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \ \forall y \in \mathrm{Image}\,f$ を示すには次の関係を使う。

$$g^{-1}\{y\} = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = y\} = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq y\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \geq y\}$$

g の可測性により右辺の各集合は $\mathcal{B}$ に属する。それらの共通部としてあらわされる $g^{-1}\{y\}$ も $\mathcal{B}$ に属する。逆向きの論理図式 $g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \ \forall y \in \mathrm{Image}\,g \Rightarrow g$ $\mathcal{B}$-可測を示すには関係

$$\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) < a\} = \bigcup_{y \in \mathrm{Image}\,g : y < a} g^{-1}\{y\}$$

を使えば良い。$\mathrm{Image}\,g$ は有限集合であるから右辺は有限合併である。 □

2.10 注意. 補題 2.9 の同値性は $\mathrm{Image}\,g$ が可算無限であるという前提のもとでも成り立つ。

記号

集合 A に対しその要素の個数を $\sharp A$ と表記する。

2.11 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{B}$-単関数、$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を関数（可測性などは要求しない）とする。合成関数 $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ も $\mathcal{B}$-単関数である。

証明. まず関数 h の像が有限集合であることを確かめる。次の関係が決定的である。

$$\mathrm{Image}(f,g) := \{(f(x),g(x))\,;\,x\in\mathbb{R}^d\} \subset \{(y,z)\,;\,y\in\mathrm{Image}\,f,\, z\in\mathrm{Image}\,g\}. \tag{2.12}$$

（左辺の方が右辺より真に小さい集合でありうる。具体例を与えてみよ。）従って

$$\sharp\,\mathrm{Image}(f,g) \le \sharp\,\mathrm{Image}\,f\,\sharp\,\mathrm{Image}\,g$$

他方、関数 h の像については

$$\mathrm{Image}\,h = \{\phi((f(x),g(x))\,;\,x\in\mathbb{R}^d\} = \{\phi(y,z)\,;\,(y,z)\in\mathrm{Image}(f,g)\} = \phi(\mathrm{Image}(f,g))$$

という関係が成り立つ。以上により

$$\sharp\,\mathrm{Image}\,h \le \sharp\,\mathrm{Image}(f,g) \le \sharp\,\mathrm{Image}\,f\,\sharp\,\mathrm{Image}\,g < +\infty$$

関数の $\mathcal{B}$-可測性のチェックポイントとしては補題 2.9 にあるものを使おう。(2.12) により

$$\{x\in\mathbb{R}^d : \phi(f(x),g(x)) = t\} = \bigcup_{y\in\mathrm{Image}\,f,\,z\in\mathrm{Image}\,g:\phi(y,z)=t} \{x\in\mathbb{R}^d : f(x)=y,\, g(x)=z\} \tag{2.13}$$

右辺の各集合は $f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\}$ と表現でき、補題 2.9 と補題 2.4 により、$\mathcal{B}$ に属することがわかる。右辺はそのような集合の有限合併であるからやはり $\mathcal{B}$ に属する。 □

2.14 系. $\mathcal{B}$-単関数 f,g と $a,b\in\mathbb{R}$ に対し 1 次結合 $af+bg$ と積 fg も $\mathcal{B}$-単関数である。

証明. $\phi(y,z)=ay+bz$ あるいは $\phi(y,z)=yz$ として補題 2.11 を適用する。 □

2.15 補題. $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ を非負値 $\mathcal{B}$-単関数、A を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ の有限部分集合とする。

$$\mathrm{Image}\,h \subset A \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} h\,\mu = \sum_{t\in A} t\mu(h^{-1}\{t\})$$

証明. 右辺の方が余分に加えていることになるが、実際は $t\notin\mathrm{Image}\,h$ なら $h^{-1}\{t\}=\emptyset$ である。測度の性質により $\mu(\emptyset)=0$ だから、余分に足しているところは影響しない。 □

2.16 定理. $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ を $\mathcal{B}$-単関数、$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を非負値関数とする。合成関数 $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\phi(f(x),g(x))$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数であって

$$\int_{\mathbb{R}^d}\phi(f,g)\,\mu = \sum_{y\in\mathrm{Image}\,f,\,z\in\mathrm{Image}\,g} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

証明. h が単関数であることはすでに補題 2.11 で示した。さて (2.13) を書き直すと

$$h^{-1}\{t\} = \bigcup_{y\in\mathrm{Image}\,f,\,z\in\mathrm{Image}\,g:\phi(y,z)=t} f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\}$$

次が最大のポイントである。

右辺の集合たちは $\mathcal{B}$ に属しかつ互いに交わらない。

有限合併であるから補題 2.6 を適用できる。したがって

$$t\mu(h^{-1}\{t\}) = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g : \phi(y,z)=t} t\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

ただし両辺に t を掛けてある。条件を取り入れて右辺を変形する。

$$t\mu(h^{-1}\{t\}) = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g : \phi(y,z)=t} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

ここで (2.12) によれば

$$\mathrm{Image}\, h = \phi(\mathrm{Image}(f,g)) \subset \{\phi(y,z)\,;\, y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g\} =: A$$

補題 2.15 を念頭に置いて、t について A 上で足しあわせよう。

$$\sum_{t\in A} t\mu(h^{-1}\{t\}) = \sum_{t\in A}\ \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g : \phi(y,z)=t} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

有限集合 A の選び方により、右辺は次に一致する。

$$\sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

他方、補題 2.15 により左辺は h の積分と等しい。 □

2.17 系. $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負値 $\mathcal{B}$-単関数とする。
(i) $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ なら $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (af+bg)\,\mu = a\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu + b\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu.$ （右辺においては $0\infty = 0$）
(ii) $g \leq f$ なら $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu.$
(iii) $\displaystyle\max\{\int_{\mathbb{R}^d} h\,\mu\,; h$ 非負値 $\mathcal{B}$-単関数$, h\leq f\} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu.$

証明. まず $\phi(y,z) = a\max\{y,0\} + b\max\{z,0\}$ として定理 2.16 を適用する。非負値 $\mathcal{B}$-単関数 $af+bg$ に対してつぎの関係が得られる。

$$\int_{\mathbb{R}^d} (af+bg)\,\mu = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g} (ay+bz)\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

右辺を変形するためにさらに $\phi(y,z) = \max\{y,0\}$ として定理 2.16 を適用してみよう。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g} y\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

同様にして次も導くことができる。

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, f, z\in \mathrm{Image}\, g} z\mu(f^{-1}\{y\}\cap g^{-1}\{z\})$$

以上を組み合わせると (i) がわかる。さて系 2.14 により $f-g$ も $\mathcal{B}$-単関数である。非負値であるからその積分は補題 2.8 により非負値である。そこで (i) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (f-g+g)\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (f-g)\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu \geq \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu$$

となる。よって (ii) が示せた。(iii) は (ii) から直ちに従う。 □

記号

$\mathbb{R}^d$ の部分集合 A に対しその**定義関数**(indicator function) を 1_A と表記する。

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

2.18 補題. $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A に対し、$A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow 1_A$ $\mathcal{B}$-可測

2.19 演習問題. 補題 2.18 を証明せよ。

2.20 補題. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする。このとき $\sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数であって次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}\,\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(A_i).$$

2.21 演習問題. 補題 2.20 を証明せよ。

3 非負値可測関数の積分

この節では非負値可測関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

積分を測度論の設定で述べるのは、解析の現場で直面する極限の交換操作が柔軟に行え、しかもその判定条件が簡潔であるという大きなメリットがあるからである。その中心となるのが単調収束定理であり、定義 1.6 の中に最初から組み込まれている。再確認しよう。

関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値かつ $\mathcal{B}$-可測なものとする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu := \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu\,; g \text{ 非負値 } \mathcal{B}\text{-単関数}, g \leq f\} \quad \text{値としては } +\infty \text{ も許容}$$

系 2.17(iii) により単関数から可測関数への拡張はシームレスである。

3.1 補題. 非負値 $\mathcal{B}$-可測関数の積分は非負値である。

証明. 非負値 $\mathcal{B}$-単関数の積分は非負値であることから従う。 □

約束および再警告

0 と $+\infty$ の積、0 と $-\infty$ の積はともに 0 とする。だが調子に乗って $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}n^2 = 0\infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。極限操作の運用は慎重になる必要がある。

3.2 補題. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数, $a \in \mathbb{R}$ とする。af も $\mathcal{B}$-可測である。

3.3 演習問題. 補題 3.2 を示せ。

記号

$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

3.4 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。
(i) $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} af\,\mu = a\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu$. (ii) $g \leq f \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu$. **積分の単調性**
(iii) $A \in \mathcal{B}$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \leq f(x)\ \forall x \in A \Rightarrow \mu(A) \leq \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu$. *Markov* **の不等式**

証明. (i), (ii) は演習問題とする。補題 2.20 によれば、$b1_A$ は非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d} b1_A\,\mu = b\mu(A)$$

がなりたつ。一方 $b1_A \leq f$ が満たされる。よって (ii) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} b1_A\,\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu$$

を得る。$b > 0$ で割ることにより結論 (iii) に至る。 □

3.5 演習問題. 補題 3.4(i), (ii) を示せ。

3.6 系. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。
(i) $f^{-1}\{+\infty\} \in \mathcal{B}$. (ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu < +\infty \Rightarrow \mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$.

証明. (i) は関係 $f^{-1}\{+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq n\}$ から導かれる。(ii) を示すには $A = f^{-1}\{+\infty\}$ として補題 3.4(iii) をを適用する。 □

単調収束定理を次の命題に帰着させて証明する。そのさい測度の σ-加法性が重要になる。

3.7 補題. a_n, b_n 非負値単調増加列 $\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

3.8 演習問題. 補題 3.7 を示せ。

記号

$\mathbb{R}^d$ の部分集合 A, B に対し $A \subset B$ の場合に $B \setminus A := B \cap A^c$ と表記する。

3.9 補題. (i) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(ii) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, $\mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

証明. $A, B \setminus A \in \mathcal{B}$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ なので有限加法性が適用できる。 □

3.10 補題. (i) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$
(ii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < +\infty \Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

証明. (i) $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ for $n \geq 2$ とおく。このとき

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n\,\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \tag{3.11}$$

$$B_n \in \mathcal{B}\,\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \cap B_m = \emptyset \text{ if } n > m \tag{3.12}$$

(3.11) を示すのは演習問題とする。(3.12) 後半は $B_n \subset (A_{n-1})^c$ と $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$ を使うと確かめられる。μ の σ-加法性を適用すると次が得られる。

$$\mu(A_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\,\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

従って $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ である。

(ii) 今度は $B_n := A_1 \setminus A_n$ for $n \in \mathbb{N}$ とおく。このとき

$$A_n = A_1 \setminus B_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{3.13}$$

ここで重要な仮定 $\mu(A_1) < +\infty$ を使う。補題 3.9(i) により

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_1) < +\infty\,\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \mu(A_1) < +\infty$$

である。よって補題 3.9(ii) により

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n),\ \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

さて $B_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ なので (i) を適用できる。すなわち $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$ は $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ に等しい。従って $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ は $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ に一致する。 □

3.14 演習問題. (3.11), (3.13) を示せ。

3.15 補題. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の列、$A \in \mathcal{B}$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$ とする。

$$f_n \leq f_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}, b \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\, \forall x \in A \Rightarrow b\mu(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu.$$

証明. $0 < r < b$ とする。条件 $f_n \leq f_{n+1}$ から次が従う。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f_{n+1}(x) > r\}.$$

さて f_n たちの $\mathcal{B}$-可測性により、上の各集合は $\mathcal{B}$ に属する。よって補題 3.10(i) が適用でき

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}).$$

各 $x \in A$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > r$ 即ちある番号 n が存在して $f_n(x) > r$ であるので

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}$$

が分かる。従って補題 3.9(i) により

$$(\star) \qquad \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}).$$

集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}$ と関数 f_n の組に補題 3.4(iii) を適用すると

$$r\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$$

従って $(\star)$ とあわせて

$$r\mu(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} r\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$$

が導かれる。r は $0 < r < b$ であれば任意なので結論を得る。 □

3.16 系. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-単関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の列、$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負値 $\mathcal{B}$-単関数とする。

$$f_n \leq f_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}, g(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\, \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g\, \mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu.$$

証明. $y \in \operatorname{Image} g$, $y > 0$ とする。記号の煩雑を避けるため適宜 $A = g^{-1}\{y\}$ とかく。関数 $1_A f_n$ も系 2.14 により $\mathcal{B}$-単関数である。また非負であることは明らか。

$$1_A f_n \leq 1_A f_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}, y = g(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_A(x) f_n(x)\, \forall x \in A$$

なので補題 3.15 を適用できる。従って

$$y\mu(g^{-1}\{y\}) = y\mu(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n\, \mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n\, \mu$$

上は $y=0$ の場合も成り立つ。ここで $1_A f_n \le 1_A f_{n+1}$ を再び使う。補題 3.4(ii) により

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \, \mu \le \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_{n+1} \, \mu \ \forall n \in \mathbb{N} \, \forall y \in \operatorname{Image} g$$

よって y についての和に対して補題 3.7 を適用できる。

$$(\star) \qquad \sum_{y \in \operatorname{Image} g} y\mu(g^{-1}\{y\}) \le \sum_{y \in \operatorname{Image} g} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \, \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \operatorname{Image} g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \, \mu$$

次に右辺について系 2.17(i) を適用する。各 $1_{g^{-1}\{y\}} f_n$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数で

$$\sum_{y \in \operatorname{Image} g} 1_{g^{-1}\{y\}}(x) f_n(x) = f_n(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

であるので、系 2.17(i) の前提条件は満たされている。よって次を得る。

$$\sum_{y \in \operatorname{Image} g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \, \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, \mu \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ここで $(\star)$ に立ち返ると

$$\sum_{y \in \operatorname{Image} g} y\mu(g^{-1}\{y\}) \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \operatorname{Image} g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \, \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, \mu$$

左辺は定義より $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g \, \mu$ である。 □

記号

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して次の関数 $\phi_n : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を導入する。

$$\phi_n(y) := \begin{cases} 0 & y < 0 \\ (k-1)/2^n & (k-1)/2^n \le y < k/2^n, k = 1, 2, \ldots, 2^n n \\ n & y \ge n \end{cases}$$

3.17 補題. (i) $\phi_n(y) \le \phi_{n+1}(y) \le y \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall y \in \overline{\mathbb{R}}$. $y < z \Rightarrow \phi_n(y) \le \phi_n(z)$.
(ii) $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき $g_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto \phi_n(f(x))$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数であり、列 g_n は $g_n \le g_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^d$ を満たす。

証明. (i) のチェックは演習問題とする。(ii) (1.1) で登場した分割を考える。

$$\begin{aligned} A(n,0) &:= \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < 0\} \\ A(n,k) &:= \{x \in \mathbb{R}^d : (k-1)/2^n \le f(x) < k/2^n\} \ k = 1, 2, \ldots, 2^n n \\ A(n,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \ge n\} \end{aligned}$$

系 2.5 により上にあげた集合はいずれも $\mathcal{B}$ に属する。g_n が非負値 $\mathcal{B}$-単関数であるのは

$$g_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{A(n,k)} + n 1_{A(n,\infty)}$$

よりわかる。あとは $\sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(y) = \max\{y, 0\}\ \forall y \in \overline{\mathbb{R}}$ を使えばよい。 □

次は**単調収束定理**(monotone convergence theorem) と呼ばれる。

3.18 定理. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の列、$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。

$$f_n \leq f_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)\, \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \mu.$$

証明. まず各 f_n は非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で $f_n \leq f$ を満たすから、補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\, \mu\, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 従って } \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\, \mu.$$

他方 $f_n \leq f_{n+1}$ であるから補題 3.17(i) より

$$\phi_n(f_n(x)) \leq \phi_{n+1}(f_n(x)) \leq \phi_{n+1}(f_{n+1}(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。$k \leq n$ なる番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_k \leq f_n$ であるから

$$\phi_n(f_k(x)) \leq \phi_n(f_n(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

補題 3.17(ii) より $f_k(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_k(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d$ であるから

$$f_k(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d\, \forall k \in \mathbb{N} \text{ 従って } \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

ここで $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負値 $\mathcal{B}$-単関数で $g \leq f$ を満たすものとしよう。

$$g(x) \leq f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_k(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

合成関数 $x \mapsto \phi_n(f_n(x))$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数なので系 3.16 により

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\, \mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n \circ f_n\, \mu$$

が得られる。さて $\phi_n(f_n(x)) \leq f_n(x)$ であったので補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\, \mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n \circ f_n\, \mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$$

$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数で $g \leq f$ であれば任意なので、積分の定義より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, \mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$$

これと証明冒頭で述べたことを合わせて結論を得る。 □

4　可積分関数とその積分

可積分な可測関数とその積分についていくつか基本的な性質を明らかにする。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

積分と呼ばれるには相応しい性質が備わっていなければならぬ。その一つが補題 3.4(ii) で述べた単調性で、もう一つは線形性である。ただし、関数のとる値として $+\infty, -\infty$ も許しているので少々注意が必要である。$\infty - \infty$ を回避するために次のように取り決める。

約束

関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して条件 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} = \emptyset$, $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} = \emptyset$ が成立するときに限って和 $f + g$ を考える。

次にはっきりさせておくべきは可測性である。

4.1 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。和が定義可能なら $f + g$ も $\mathcal{B}$-可測である。

証明. 次の関係を使えばよい。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b, g(x) > a - b\} \tag{4.2}$$

ここで、有理数全体 $\mathbb{Q}$ の可算性により、右辺は可算無限合併である。 □

4.3 演習問題. (4.2) を示せ。

4.4 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。和 $f + g$ も非負値 $\mathcal{B}$-可測であって

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f + g)\, \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g\, \mu. \quad \textbf{積分の線形性}$$

証明. 関数 f, g に対して補題 3.17(ii) の手続きで構成される非負値 $\mathcal{B}$ 単関数の列をそれぞれ f_n, g_n とする。このとき非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数の列 $f_n + g_n$ は $f_n + g_n \leq f_{n+1} + g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ を満たし、さらに補題 3.7 により

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x) + g_n(x)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) + \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = f(x) + g(x)\, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

従って列 $f_n + g_n$ に定理 3.18 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f + g)\, \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} (f_n + g_n)\, \mu$$

f_n, g_n は非負値 $\mathcal{B}$ 単関数であるから右辺は系 2.17(i) により次に等しい。

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g_n\, \mu \Big) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n\, \mu$$

ここで再び補題 3.7 を適用したわけだが、事前に $f_n \leq f_{n+1}$ なので $\int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_{n+1}\,\mu$ であると確認するのを怠ってはいけない。列 f_n, g_n それぞれに定理 3.18 を適用して得られる

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu$$

の和をとったものがまさに示そうとしていた等式の右辺である。 □

4.5 補題. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき $|f|$, $\max\{f, 0\}$, $\max\{-f, 0\}$ はいずれも非負値 $\mathcal{B}$-可測関数であって

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu < +\infty \ \Leftrightarrow \ \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\}\,\mu < +\infty, \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\}\,\mu < +\infty.$$

証明. 関数 $\max\{f, 0\}$ の $\mathcal{B}$-可測性を確かめる。それは以下の関係から分かる。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \max\{f(x), 0\} < a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a \leq 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} & \text{if } a > 0 \end{cases}$$

同様にして $\max\{-f, 0\}$ の可測性も導ける。さて $|f| = \max\{f, 0\} + \max\{-f, 0\}$ である。定理 4.4 を使うと $|f|$ の可測性と次の等式を得る。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\}\,\mu.$$

従って同値性が得られた。 □

定義 1.8 を再確認しておこう。

$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。f が μ-**可積分**であるとは

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu < +\infty.$$

が成り立つことをいう。このとき f の μ についての**積分**を次で定義する。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu := \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\}\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\}\,\mu.$$

非負値関数については $\max\{-f, 0\} = 0$ であるから、非負値可測関数から一般の可測関数への拡張はやはりシームレスである。

約束

$\mathcal{B}$-可測かつ μ-可積分な関数を今後は $(\mathcal{B}, \mu)$-**可積分関数**(integrable function) と言うことにする。

以下、可積分な可測関数とその積分について基本的な性質を列挙していくわけだが、とりわけ定理 4.6、定理 4.8 および定理 4.9 に提示される不等式は多くの場面で登場する重要なものである。

約束と再警告

0 と $+\infty$ の積、0 と $-\infty$ の積はともに 0 とする。だが調子に乗って $\infty - \infty = (1-1)\infty = 0\infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。分配法則の運用は慎重になる必要がある。

4.6 定理. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数とする。

(i) $a \in \mathbb{R}$ に対して af も $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数であって $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} af\,\mu = a\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu.$

(ii) 不等式 $\displaystyle\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu$ が成り立つ。$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = 0$

4.7 演習問題. 定理 4.6 を示せ。

次の定理は**積分の単調性**を可積分関数について述べている。

4.8 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数とする。$g \le f \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu.$

証明. $g \le f$ なので条件

$$\max\{g, 0\} \le \max\{f, 0\},\ \max\{-f, 0\} \le \max\{-g, 0\}$$

が成り立ち、補題 3.4(ii) が適用できる。すなわち

$$\int_{\mathbb{R}^d} \max\{g, 0\}\,\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\}\,\mu,\ \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\}\,\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g, 0\}\,\mu.$$

各積分は有限の値であるから、辺々たしあわせて移項すると求める不等式に至る。 □

次の定理は**積分の線形性**を可積分関数について述べている。

4.9 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数とする。和が定義可能なら $f + g$ も $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f+g|\,\mu \le \int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} |g|\,\mu,\ \int_{\mathbb{R}^d} (f+g)\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu$$

証明. 和が定義可能なので $f + g$ も $\mathcal{B}$-可測である。さらに $|f + g| \le |f| + |g|$ であるから、補題 3.4(ii) と定理 4.4 を適用して最初の不等式が得られる。従って $f + g$ も μ-可積分である。さて $f(x) = +\infty,\ g(x) = -\infty$ となる $x \in \mathbb{R}^d$ は存在しない。また $f(x) = -\infty,\ g(x) = +\infty$ となる $x \in \mathbb{R}^d$ も存在しない。よって

$$\max\{f+g, 0\} + \max\{-f, 0\} + \max\{-g, 0\} = \max\{-f-g, 0\} + \max\{f, 0\} + \max\{g, 0\}$$

という関係が成り立ち、定理 4.4 が適用できる。すなわち

$$\int_{\mathbb{R}^d} \max\{f+g,0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f,0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g,0\}\,\mu$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f-g,0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f,0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{g,0\}\,\mu$$

各積分は有限の値であるから、移項して整理すると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \max\{f+g,0\}\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f-g,0\}\,\mu$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f,0\}\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f,0\}\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{g,0\}\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g,0\}\,\mu$$

左辺は $f+g$ の積分であり、右辺は f, g それぞれの積分の和である。 □

4.10 注意. 定理 4.9 ではいちいち和が定義可能ならという前提がつくのが何とも煩わしい。これから逃れるには、測度 0 という概念を導入して少し議論する必要がある。

記号

$\mathcal{B}$-可測関数 $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu$ を f の L^1 **セミノルム**(semi-norm) という。

L^1 セミノルムは補題 3.4(i) と定理 4.9 により以下に述べる性質を持つ。

$\|f\|_1 \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ に対し $\|af\|_1 = |a|\|f\|_1$, $f+g$ が定義可能なら $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

$\|\ \|_1$ を L^1 ノルムではなく L^1 セミノルムと呼ぶ理由は次の補題で説明される。

4.11 補題. $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0.$$

証明. まず $\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = 0$ と仮定しよう。補題 3.4(iii) によれば各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\}) \leq n \int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = 0$$

が成り立つ。ところで $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/(n+1)\}$ かつ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\} = \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$$

である。よって補題 3.10(i) により

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\}) = 0.$$

次に $\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0$ と仮定する。非負値 $\mathcal{B}$-単関数 g で $g \leq |f|$ を満たすものをひとまず固定する。$y \in \operatorname{Image} g,\ y > 0$ としよう。

$$0 < y = g(x) \leq |f(x)|\ \forall x \in g^{-1}\{y\} \text{ 従って } g^{-1}\{y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$$

即ち $g^{-1}\{y\}$ は μ-測度 0 の集合に包含されるので補題 3.9(i) より、

$$y \in \operatorname{Image} g, y > 0 \Rightarrow \mu(g^{-1}\{y\}) = 0$$

従って $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mu = 0$ となり、積分の定義より $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f|\,\mu = 0$ を得る。 □

4.12 演習問題. $\mathcal{B}$-可測関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ （$\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目）であって条件

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0$$

を満たすもの全体は線形空間をなすことを示せ。

4.13 補題. $\mathcal{B}$-可測関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して積 fg も $\mathcal{B}$-可測である。

証明. 説明を簡単にするため、$f,\ g$ ともに非負としよう。次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) < a\} \\ &= \begin{cases} \{x : f(x) = 0\} \cup \{x : g(x) = 0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Q} : b > 0} \{x : f(x) < b, g(x) < a/b\} & a > 0 \\ \emptyset & a \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

ここで、有理数全体 $\mathbb{Q}$ の可算性により、右辺は可算無限合併である。 □

4.14 補題. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数、$A \in \mathcal{B}$ とする。
(i) $1_A f,\ 1_{A^c} f$ は $\mathcal{B}$-可測。f 非負値 $\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A^c} f\,\mu.$
(ii) f μ-可積分 $\Leftrightarrow$ $1_A f$ μ-可積分かつ $1_{A^c} f$ μ-可積分
(iii) f μ-可積分 $\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f\,\mu + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A^c} f\,\mu.$

証明. (i) まず関数 $1_A f$ の $\mathcal{B}$-可測性は補題 4.13 から分かる。さて $f = 1_A f + 1_{A^c} f$ なので定理 4.4 を適用して (i) の残りが導ける。また (ii) については $|f| = |1_A f| + |1_{A^c} f|$ であるから (i) により従う。(iii) は定理 4.9 と (ii) を適用して導ける。 □

4.15 注意. 0 と ∞ の積は 0 という約束により $1_A(x) f(x) = 0\ \forall x \in A^c$ である。

記号

$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数、$A \in \mathcal{B}$ とする。$1_A f$ が非負値または μ-可積分のとき

$$\int_A f\,\mu := \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f\,\mu.$$

を f **の可測集合** A **上の積分**という。

4.16 系. $f: \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数、$A \in \mathcal{B}$ とする。
(i) $\mu(A) = 0 \Rightarrow 1_A f$ μ-可積分、$\displaystyle\int_A f\,\mu = 0$.
(ii) f μ-可積分（あるいは非負値）、$\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mu = \int_A f\,\mu$.

証明. (i) $\{x \in \mathbb{R}^d : 1_A(x)f(x) \neq 0\} \subset A$ であるから補題 3.9(i) より、

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : 1_A(x)f(x) \neq 0\}) \leq \mu(A) = 0$$

である。従って補題 4.11 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |1_A f|\,\mu = 0$$

を得る。とくに $1_A f$ は μ-可積分である。さらに定理 4.6(ii) より $\displaystyle\int_A f\,\mu = 0$ が従う。
(ii) $\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0$ なので補題 4.14 と (i) を適用して結論を得る。 □

5　ルベーグの収束定理

この節では測度論的な積分の長所のひとつである収束定理の明解さを紹介する。その根元にあるのが定理 3.18 すなわち**単調収束定理**である。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

5.1 補題. f_n を $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。以下の関数はすべて $\mathcal{B}$-可測である。

$$x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x), x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > a\}$ などを使う。 □

5.2 演習問題. 補題 5.1 を示せ。

5.3 演習問題. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。関数 $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathcal{B}$-可測であることを示せ。

次は項別積分定理 (term-by-term integration) であるが、被積分関数が非負値であるところに注意されたい。

5.4 補題. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mu.$$

証明. 正項級数については $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ であるから定理 4.4 と定理 3.18 に帰着する。 $\square$

5.5 定理. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。
(i) 関数 $\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \int_A f\,\mu$ は測度である。**積分の** σ**-加法性**
(ii) 任意の非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数 $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\,\nu = \int_{\mathbb{R}^d} gf\,\mu$$

証明. (i) $A_n \in \mathcal{B}$ $n \in \mathbb{N}$ かつ $A_n \cap A_m = \emptyset$ $n \neq m$ とする。$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とかくと $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} f = 1_A f$ であるから、補題 5.4 を適用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,\mu = \int_A f\,\mu = \nu(A)$$

を得るが、これは σ 加法性に他ならない。
(ii) まず g が単関数である場合を考える。このとき定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}} g\,\nu = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, g} y\nu(g^{-1}(\{y\})) = \sum_{y\in \mathrm{Image}\, g} y \int_{g^{-1}(\{y\})} f\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{y\in \mathrm{Image}\, g} y 1_{g^{-1}(\{y\})} f\,\mu$$

となるが、右辺の被積分関数はちょうど gf である。一般には補題 3.17(ii) により非負値 $\mathcal{B}$-単関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の列 g_n で $g_n \leq g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$ を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} g_n\,\nu = \int_{\mathbb{R}} g_n f\,\mu$ なので定理 3.18 を適用して結論に至る。 $\square$

次は *Fatou* **の補題**と呼ばれるが、事実上は定理と呼ばれるに相応しい内容を持つ。

5.6 定理. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu.$$

証明. 非負値 $\mathcal{B}$-可測関数列 $\inf_{k\geq n} f_k$ に定理 3.18 が適用できるので

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k\geq n} f_k\,\mu$$

を得る。他方、補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k\geq n} f_k\,\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mu\ \forall k \geq n \text{ 従って } \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k\geq n} f_k\,\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\,\mu$$

以上を組み合わせて結論に至る。 $\square$

次の定理は *Lebesgue* **の優収束定理**(Lebesgue dominated convergence theorem) あるいは単に *Lebesgue* **の収束定理**と呼ばれ、測度論的な積分に関しては一つの頂点である。

5.7 定理. $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B},\mu)$-可積分関数、f_n を $(\mathcal{B},\mu)$-可積分関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ の列で

$$\exists g\ (\mathcal{B},\mu)\text{-可積分 s.t. } |f_n(x)|\le g(x)\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall x\in\mathbb{R}^d,\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,\forall x\in\mathbb{R}^d$$

を満たすものとする。このとき数列 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu$ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu$ に収束する。

証明. $A:=\{x\in\mathbb{R}^d:g(x)<+\infty\}$ とおく。系 3.6 より $A\in\mathcal{B}$ かつ $\mu(A^{\mathrm{c}})=0$ である。系 4.16(ii) を適用して次が分かる。

$$(\star)\qquad \int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu=\int_{\mathbb{R}^d}1_Af_n\,\mu,\ \int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu=\int_{\mathbb{R}^d}1_Af\,\mu$$

さて $|f_n|\le g$ かつ $g(x)<+\infty\ \forall x\in A$ なので $1_Ag+1_Af_n$ は定義可能で、非負値である。1_Ag+1_Af についても同様のことがいえる。定理 5.6 より

$$\int_{\mathbb{R}^d}\liminf_{n\to\infty}(1_Ag+1_Af_n)\,\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(1_Ag+1_Af_n)\,\mu.$$

仮定より $\liminf_{n\to\infty}(1_Ag+1_Af_n)=1_Ag+1_Af$ なので定理 4.9 も考慮に入れて

$$\int_{\mathbb{R}^d}1_Ag\,\mu+\int_{\mathbb{R}^d}1_Af\,\mu\le\liminf_{n\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}1_Ag\,\mu+\int_{\mathbb{R}^d}1_Af_n\,\mu\Big)$$

を得る。各積分は有限の値であるから移項してさらに $(\star)$ とあわせて

$$\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu$$

が導ける。$1_Ag-1_Af_n$ についても同様の考察をすることにより

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu\le\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu$$

が示せるので、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu$ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}f\,\mu$ に収束する。 □

Fatou の補題と Lebesgue の収束定理を組み合わせて次の形で利用することも多く *Lebesgue-Fatou* **の補題**と呼ばれる。その証明は定理 5.7 のものとかなり重複するが、あえて省略せずに述べておく。

5.8 定理. f_n を $(\mathcal{B},\mu)$-可積分関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ の列で次を満たすものとする。

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu<+\infty,\ \exists g\ (\mathcal{B},\mu)\text{-可積分 s.t. } f_n(x)\ge g(x)\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall x\in\mathbb{R}^d.$$

このとき $\liminf_{n\to\infty}f_n$ は $(\mathcal{B},\mu)$-可積分で、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\liminf_{n\to\infty}f_n\,\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n\,\mu$ が成り立つ。

証明. $A := \{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| < +\infty\}$ とおく。系 3.6 より $A \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(A^c) = 0$ である。さて $f_n \geq g$ かつ $g(x) \neq +\infty, -\infty\ \forall x \in A$ なので $1_A f_n - 1_A g$ は定義可能で、非負値である。$1_A \liminf_{n\to\infty} f_n - 1_A g$ についても同様である。定理 5.6 により次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty}(1_A f_n - 1_A g)\,\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (1_A f_n - 1_A g)\,\mu$$

$\mu(A^c) = 0$ なので系 4.16(ii) が適用できる。定理 4.9 も考慮に入れて次を得る。

$$(\star)\qquad \begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (1_A \liminf_{n\to\infty} f_n - 1_A g)\,\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g\,\mu\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g\,\mu < +\infty\end{aligned}$$

これは非負値関数 $1_A \liminf_{n\to\infty} f_n - 1_A g$ の $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分性を意味する。従って

$$1_A \liminf_{n\to\infty} f_n = (1_A \liminf_{n\to\infty} f_n - 1_A g) + 1_A g \text{ は } (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分である}$$

ことが定理 4.9 を適用して導ける。さらに $(\star)$ から

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A \liminf_{n\to\infty} f\,\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu$$

が導ける。$\mu(A^c) = 0$ なので、補題 4.14 と系 4.16(i) により $\liminf_{n\to\infty} f_n$ は $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分でありかつ左辺はその積分に等しいことを得る。 □

6 測度 0 の集合

この節では測度論的な積分においてキーとなるほとんどいたるところという概念を紹介する。また可算加法性から導かれる重要な成果の一つである L^1 空間の完備性を証明する。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度とする。

6.1 補題. f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$f_n \leq f_{n+1}\,\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = +\infty\}) = 0.$$

証明. 定理 3.18 により次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu < +\infty$$

ゆえに系 3.6 を適用して結論を得る。 □

6.2 定義. 次の条件を満たす $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A を $(\mathcal{B},\mu)$-**零集合**(null set) とよぶ。

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } \mu(B) = 0, A \subset B$$

補集合 A^{c} の方は $(\mathcal{B},\mu)$-*a.e.* 集合とよぶ。またある性質の成立する集合が $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合であるとき、その性質は**測度** $(\mathcal{B},\mu)$ **に関しほとんどいたるところ**(almost everywhere) 成立するという。通常 μ-a.e. と略記する。

6.3 例. 補題 6.1 は次のように表現される。

> 非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ の列 f_n が条件 $f_n \le f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu < +\infty$ を満たすなら $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n < +\infty$ μ-a.e. である。

6.4 注意. $\mathcal{B}$ が $(\mathcal{B},\mu)$-零集合すべてを含む場合、測度 $(\mathcal{B},\mu)$ は**完備**(complete) であるという。$(\mathcal{B},\mu)$-零集合は必ずしも $\mathcal{B}$ に属していないので次の補題が意味を持つ。

6.5 補題. $A \in \mathcal{B}$ である場合は A が $(\mathcal{B},\mu)$-零集合とは $\mu(A) = 0$ に他ならない。

証明. $(\mathcal{B},\mu)$-零集合であれば $\mu(B) = 0$, $A \subset B$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する。$A \in \mathcal{B}$ であるから補題 3.9(i) を適用して $0 \le \mu(A) \le \mu(B) = 0$ と推論できる。 □

6.6 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき以下のいずれの集合も $\mathcal{B}$ に属する。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < g(x)\},\ \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \le g(x)\},\ \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = g(x)\}.$$

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a \le g(x)\}$ などを使う。 □

6.7 演習問題. 補題 6.6 を示せ。

6.8 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。
(i) g 非負値、$|f| \le g$ μ-a.e. $\Rightarrow \displaystyle\int_A |f|\,\mu \le \int_A g\,\mu\ \forall A \in \mathcal{B}$.
(ii) f, g μ-可積分、$f \le g$ μ-a.e. $\Rightarrow \displaystyle\int_A f\,\mu \le \int_A g\,\mu\ \forall A \in \mathcal{B}$.

証明. (i) $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \le g(x)\}$ とおく。$\mu(B^{\mathrm{c}}) = 0$ なので系 4.16(ii) を適用して

$$\int_A |f|\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A|f|\,\mu = \int_B 1_A|f|\,\mu \le \int_B 1_A g\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g\,\mu = \int_A g\,\mu \forall A \in \mathcal{B}$$

を得る。まん中の不等号は集合 B の決め方により $|1_B 1_A f| \le 1_B 1_A g$ だから補題 3.4(ii) を適用して導かれる。(ii) についても同様の議論である。 □

6.9 演習問題. 定理 6.8(ii) を示せ。

6.10 系. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}$-可測関数とする。
(i) f, g 非負値、$f = g$ μ-a.e. $\Rightarrow \displaystyle\int_A f\,\mu = \int_A g\,\mu\ \forall A \in \mathcal{B}$.
(ii) g μ-可積分、$f = g$ μ-a.e. $\Rightarrow f$ μ-可積分、$\displaystyle\int_A f\,\mu = \int_A g\,\mu\ \forall A \in \mathcal{B}$.

6.11 演習問題. 系 6.10 を示せ。

次の定理は L^1 **空間の完備性**を述べるもので測度論的設定が大成功を納めた典型例である。更に L^p 空間と呼ばれる対象まで一般化でき、それは *Riesz-Fischer* **の定理**と呼ばれる。

6.12 定理. $\| \ \|_1$ を L^1 セミノルムとする。f_n を $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$（$\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目）の列で Cauchy の条件 $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_1 = 0$ をみたすものとする。このとき $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ が成り立つ。

証明. Cauchy の条件により任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ と $K \in \mathbb{N}$ に対してある $m \in \mathbb{N}$ で $m \geq K$ かつ $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon \ \forall n > m$ を満たすものが存在する。従って帰納的に自然数列 $\alpha(k)$ で

$$\alpha(k) < \alpha(k+1) \, \forall k \in \mathbb{N}, \|f_n - f_{\alpha(k)}\|_1 < 1/2^k \, \forall n > \alpha(k) \, \forall k \in \mathbb{N}$$

を満たすものが構成できる。非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $g_k := \sum_{i=1}^k |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|$ について

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_k \, \mu = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \, \mu = \sum_{i=1}^k \|f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}\|_1 \leq \sum_{i=1}^k 1/2^i \leq 1$$

$g_k \leq g_{k+1}$ であるから補題 6.1 を適用すると

$$\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0 \text{ ただし } A := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^\infty |f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x)| < +\infty\} \in \mathcal{B}$$

$x \in A$ なら級数 $\sum_{k=1}^\infty (f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x))$ は絶対収束し、その部分和について

$$\text{第 } k \text{ 部分和} = f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(1)}(x)$$

である。$\mathbb{R}^d$ 全体で対応するため次の $\mathcal{B}$-可測関数を導入する。

$$f : x \mapsto 1_A(x) \liminf_{k\to\infty} f_{\alpha(k)}(x)$$

可測性は補題 4.14(i) と補題 5.1 を使って確認できる。$\forall k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。$x \in A$ なら級数和は $f(x) - f_{\alpha(1)}(x)$ に等しいので

$$|f(x) - f_{\alpha(k)}(x)| \leq \sum_{i=k}^\infty |f_{\alpha(i+1)}(x) - f_{\alpha(i)}(x)| \, \forall x \in A$$

$\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0$ に着目して定理 6.8(ii) と補題 5.4 を適用する。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{\alpha(k)}| \, \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=k}^\infty |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \, \mu = \sum_{i=k}^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \, \mu \leq \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$n \in \mathbb{N}$ かつ $n > \alpha(k)$ とする。$\|f_n - f_{\alpha(k)}\|_1 < 1/2^k$ であったので

$$\|f - f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| \, \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{\alpha(k)}| \, \mu + \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(k)} - f_n| \, \mu \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}$$

最初の不等号は定理 4.9 による。よって $\|f - f_n\|_1$ は 0 に収束する。 □

次は**項別積分定理**である。以前の補題 5.4 と異なり被積分関数に非負値性は要求しないがその代わりとなる条件が付いている点に注意されたい。

6.13 定理. f_n を$\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$（$\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目）の列で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n|\, \mu < +\infty$ をみたすものとする。このとき以下が成り立つ。

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ μ-a.e., $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ と $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ は μ-可積分

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$ は絶対収束、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu.$

証明. 非負値関数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分である。なぜなら補題 5.4 を適用すると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\, \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n|\, \mu < +\infty.$$

従って系 3.6 により関数項級数は μ-a.e. 絶対収束している。しかも次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geq -\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|\ \forall x \in \mathbb{R}^d\, \forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n|\, \mu\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

よって定理 5.8 を適用して $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ の μ-可積分性と

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, \mu$$

を得る。同様の議論により $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k$ の μ-可積分性と

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} f_k\, \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k\, \mu$$

を得る。さて次の包含関係が成り立ち、前者は $(\mathcal{B}, \mu)$-a.e. 集合である。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}$$

ゆえに系 6.10(ii) を適用して結論に至る。 □

6.14 演習問題. 定理 6.13 において $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \mu$ は絶対収束することを示せ。

まだ、Lebesgue 測度の存在およびその微積分の基本定理との関係を調べていないので、項別積分定理などを具体例に応用はできないのであるが、それではあまりに味気ないので先取りしておく。次の例を Riemann 積分の世界にとどまって証明するには煩わしい前提条件をチェックする必要がある。

6.15 例. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\theta = 2\pi,\ 0 \le \forall r < 1.$

証明. 以後 r は条件を満たすものを固定する。直接計算により

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\ \forall\theta\in[-\pi,\pi],\ \int_{-\pi}^{\pi} 2r^n\cos n\theta\,d\theta = 0\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{6.16}$$

$0 \le r < 1$ なので左の関数項級数は絶対収束している。一方

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |2r^n\cos n\theta|\,d\theta \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} 2r^n\,d\theta = \frac{4\pi r}{1-r} < +\infty$$

が成り立つ。従って定理 6.13 により

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2r^n\cos n\theta\,d\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} 2r^n\cos n\theta\,d\theta.$$

故に (6.16) を考慮して結論に到達する。 □

6.17 演習問題. (6.16) を示せ。

この節を閉じるにあたって $(\mathcal{B},\mu)$-零集合の重要な性質を述べる。またそれらの典型的な適用例についてもふれる。まずその定義から直ちに分かることは次の通り。

(i) A $(\mathcal{B},\mu)$-零集合、$B\subset A \Rightarrow B$ $(\mathcal{B},\mu)$-零集合
(ii) A $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合、$A\subset B \Rightarrow B$ $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合

6.18 補題. $A_n\in\mathcal{B}\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. **劣加法性**(subadditivity)

証明. $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと次の関係が成り立つ。

$$1_B \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$$

よって補題 3.4(ii) と補題 5.4 を適用して結論を得る。 □

6.19 系. (i) A_n $(\mathcal{B},\mu)$-零集合 $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-零集合
(ii) A_n $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合 $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合

6.20 演習問題. 系 6.19 を示せ。

6.21 例. 単調収束定理の拡張。f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$f_n \le f_{n+1}\ \mu\text{-a.e.}\,\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d}\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mu.$$

証明. $A := \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) \le f_{n+1}(x)\} \in \mathcal{B}$ である。関数列 $1_A f_n$ に対して定理 3.18 が適用できるので

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_A f_n\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n\,\mu.$$

系 6.19(ii) によれば A は $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合である。従って系 4.16 を使って結論を得る。 □

6.22 補題. f, g, h を $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき
(i) $f \le g$ μ-a.e., $g \le f$ μ-a.e. $\Rightarrow$ $f = g$ μ-a.e. (ii) $f \le g$ μ-a.e., $g \le h$ μ-a.e. $\Rightarrow$ $f \le h$ μ-a.e.

証明. (i) μ-a.e. 集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \le g(x)\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \le f(x)\}$ の共通部で表される $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = g(x)\}$ は系 6.19(ii) により μ-a.e. 集合である。 □

6.23 演習問題. 補題 6.22(ii) を示せ。

6.24 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B},\mu)$-可積分関数とする。

$$\int_A f\,\mu \le \int_A g\,\mu \ \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f \le g \ \mu\text{-a.e.}$$

証明. 仮定されているのは f, g の可積分性と $\int_A f\,\mu \le \int_A g\,\mu \ \forall A \in \mathcal{B}$ である。系 3.6 より

$$B := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| < +\infty\} \in \mathcal{B} \text{ かつ } \mu(B^{\mathrm{c}}) = 0$$

また $B \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 1_B(x)f(x) = f(x)\}$ である。従って $1_B f = f$ μ-a.e. なので系 6.10 により

$$\int_A 1_B f\,\mu = \int_A f\,\mu \le \int_A g\,\mu \ \forall A \in \mathcal{B}.$$

$A = \{x \in \mathbb{R}^d : 1_B(x)f(x) > g(x)\}$ とえらぶ。$\max\{1_B f - g, 0\} = 1_A(1_B f - g)$ なので、

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^d} \max\{1_B f - g, 0\}\,\mu = \int_A (1_B f - g)\,\mu = \int_A 1_B f\,\mu - \int_A g\,\mu \le 0.$$

上の 2 番目の等号では $1_B f$, g ともに μ 可積分であることが重要である。従って補題 4.11 により $\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : \max\{1_B(x)f(x) - g(x), 0\} \ne 0\}) = 0$ である。さて

$$\max\{1_B(x)f(x) - g(x), 0\} = 0 \Leftrightarrow 1_B(x)f(x) \le g(x)$$

であるから、$1_B f \le g$ μ-a.e. が得られる。一方すでに確かめたように $f = 1_B f$ μ-a.e. なので補題 6.22 を考慮に入れて結論 $f \le g$ μ-a.e. を得る。 □

6.25 系. $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B},\mu)$-可積分関数とする。

$$\int_A f\,\mu = \int_A g\,\mu \ \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f = g \ \mu\text{-a.e.}$$

6.26 演習問題. 系 6.25 を示せ。

7　有限加法的測度とそれが誘導する外測度

区間の長さを有限加法的測度としてとらえて議論を行う。外面積の考えを拡張して外測度を定式化しさらにそれの持つ性質を公理化して測度の構成へとつなげる。

記号

記号 $\mathcal{I}$ は**左半開区間**の全体に空集合 $\emptyset$ を付加した集合族を表す。ここで左半開区間とは $\mathbb{R}$ の部分集合で $(a, b]$, 但し $a, b \in \mathbb{R}$ は $a < b$ をみたす、と書けるものをいう。

7.1 定義. 互いに共通部を持たない部分集合からなる族を**非交叉族**(disjoint family) という。

7.2 補題. (i) $\emptyset \in \mathcal{I}$. $A, B \in \mathcal{I}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{I}$ である。
(ii) $A, B \in \mathcal{I}$, $B \subset A$, $A \neq B$ ならば有限な非交叉族 $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ で $I_k \neq \emptyset\ \forall k = 1, \ldots, n$ かつ $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ をみたすものが存在する。

証明. (i) 左半開区間どうしの共通部は左半開区間であるかまたは $\emptyset$ である。

(ii) $B = \emptyset$ の場合は非交叉族として A だけからできるものをとればよい。そこで $a < b$, $B = (a, b]$ としよう。その補集合は $(-\infty, a]$ と $(b, +\infty)$ の二つの部分からなる。従って求める非交叉族はこれらと左半開区間 A との共通部で空でないものから構成される。 □

約束

$\mathbb{R}^d$ の部分集合の族 $\mathcal{C}$ が指定されたとき $\mathcal{C}$ に属する集合を $\mathcal{C}$-**集合**とよぶ。

たとえば、$\mathbb{R}$ の部分集合については $\mathcal{I}$-集合とは左半開区間あるいは $\emptyset$ のことである。

7.3 定義. A を $\mathbb{R}^d$ の空でない部分集合とする。A の**分割**(partition) とは $\mathbb{R}^d$ の空でない部分集合からなる非交叉族 Δ であって $\bigcup_{J \in \Delta} J = A$ を満たすものをいう。特に部分集合の族 $\mathcal{C}$ が指定されている場合 $\mathcal{C}$-集合から構成されているものを $\mathcal{C}$-**分割**という。

7.4 補題. Δ を空でない $\mathcal{I}$-集合からなる有限な非交叉族とし $A \in \mathcal{I}$ とする。
(i) $\bigcup_{J \in \Delta} J \subset A$, $\bigcup_{J \in \Delta} J \neq A$ なら $A \setminus (\bigcup_{J \in \Delta} J)$ の有限な $\mathcal{I}$-分割が存在する。
(ii) $\bigcup_{J \in \Delta} J \cup A$ の有限な $\mathcal{I}$-分割 Λ であって $\Delta \subset \Lambda$ を満たすものが存在する。

証明. (i) 数学的帰納法を使う。まず Δ がひとつの集合 B からできているときを考える。仮定より $B \in \mathcal{I}$ である。従って補題 7.2(ii) により $A \setminus B$ の有限な $\mathcal{I}$-分割が存在する。すなわち $\sharp\Delta = 1$ のとき (i) は成り立つ。

$$k \in \mathbb{N} \text{ かつ } \sharp\Delta \leq k \text{ のとき (i) が成り立つと仮定する。}$$

そこで $\sharp\Delta = k + 1$ とし、族 Δ からひとつ集合 B を取り去る。すると $\sharp(\Delta \setminus \{B\}) = k$ なので $A \setminus (\bigcup_{J \in \Delta : J \neq B} J)$ の有限な $\mathcal{I}$-分割 Φ が存在する。B に含まれるか否かで分類する。

$$\{I \in \Phi : I \cap B = I\},\ \Phi_0 := \{I \in \Phi : I \cap B \neq I\}.$$

各 $I \in \Phi_0$ に対して $I \cap B \in \mathcal{I}$, $I \cap B \subset I$, $I \cap B \neq I$ なので補題 7.2(ii) により $I \setminus (I \cap B)$ の有限な $\mathcal{I}$-分割 $\Lambda(I)$ が存在する。これらを集めたもの $\Lambda := \bigcup_{I \in \Phi_0} \Lambda(I)$ が求める有限な $\mathcal{I}$-分割である。

(ii) $A \subset \bigcup_{J \in \Delta} J$ なら Δ 自身が求める有限な $\mathcal{I}$-分割であり、$A \neq \emptyset$ かつ $J \cap A = \emptyset\ \forall J \in \Delta$ なら $\Lambda := \Delta \cup \{A\}$ が求めるものである。そうでない場合は $\Delta_0 := \{J \in \Delta : J \cap A \neq \emptyset\}$ とおき (i) を $\{J \cap A; J \in \Delta_0\}$ と A の組に適用することができる。従って

$$A \setminus \bigcup_{J \in \Delta_0} (J \cap A) \text{ の有限な } \mathcal{I}\text{-分割 } \Lambda_0 \text{ が存在する。}$$

これと既存の非交叉族 Δ をあわせたもの $\Lambda := \Lambda_0 \cup \Delta$ が求める有限な $\mathcal{I}$-分割である。 □

7.5 系. $A \in \mathcal{I}$, $A \neq \emptyset$, $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{I}$ とする。$A \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ なら A の有限な $\mathcal{I}$-分割 Δ であって $\Delta = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Delta : J \subset C_i\}$ を満たすものが存在する。

証明. $A = \bigcup_{i=1}^n (C_i \cap A)$ かつ $C_i \cap A \in \mathcal{I}$ なので $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$ と仮定してもかまわない。即ち次の命題を証明すればよい。

> $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{I}$ とする。$C_1 \neq \emptyset$ なら $\bigcup_{i=1}^n C_i$ の有限な $\mathcal{I}$-分割 Δ であって $\Delta = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Delta : J \subset C_i\}$ を満たすものが存在する。

$n = 1$ のときは C_1 のみからなる族 $\{C_1\}$ が求めるものである。あとは補題 7.4(ii) を随時適用して n に関しての帰納法により証明できる。その実行は演習問題とする。 □

7.6 演習問題. 系 7.5 を示せ。

補題 7.4 および系 7.5 は集合族 $\mathcal{I}$ に対して補題 7.2 の結論 (i), (ii) が成り立つという事実にのみ基づいて証明されている。そこで一般の集合族 $\mathcal{C}$ について公理化を行う。

補題 7.2 の公理化

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$. $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.
(ii) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$, $A \neq B \Rightarrow A \setminus B$ の有限な $\mathcal{C}$-分割が存在する。

約束

いちいち断るのも煩わしいので、これから先は A が空集合である場合その分割とは空な族のことと理解する。

次に面積などの持つ性質を公理化する。

7.7 定義. $\mathcal{C}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族、m を関数 $\mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。それが次の条件を満たすとき、$(\mathcal{C}, m)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の**有限加法的測度**(finitely additive measure) であるという。

(i) $\mathcal{C}$ に対して補題 7.2 の公理化が成り立つ。
(ii) $m(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{C}$, $m(\emptyset) = 0$.
(iii) $A \in \mathcal{C}$ とその有限な $\mathcal{C}$-分割 Δ に対して $m(A) = \sum_{J \in \Delta} m(J)$.

性質 (iii) を**有限加法性**(finite additivity) という。(iii) が任意の可算無限な $\mathcal{C}$-分割についても成り立つとき m は σ-**加法的**(σ-additive) であるという。

7.8 演習問題. $\mathbb{R}^d$ 上の測度 $(\mathcal{B}, \mu)$ は σ-加法的な有限加法的測度であることを確認せよ。

7.9 例. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を非減少関数とする。このとき

$$\mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}},\ J \mapsto v(\sup J) - v(\inf J)$$

は $\mathbb{R}$ 上の有限加法的測度である。但し空集合 $\emptyset$ に対しては値 0 を割り当てる。

証明. 左半開区間 $(a, b]$ の有限な $\mathcal{I}$-分割は次のように表現できる。

$$(c_i, c_{i+1}]\ i = 1, 2, \ldots, n.\ \text{但し}\ a = c_1 < c_2 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b$$

$v(b) - v(a) = \sum_{i=1}^{n} \{v(c_{i+1}) - v(c_i)\}$ であるから有限加法性が成り立つ。 □

7.10 定義. 例 7.9 で述べた有限加法的測度を**非減少関数** v **が誘導する有限加法的測度**という。

記号

非減少関数 v が誘導する $\mathbb{R}$ 上の有限加法的測度を $(\mathcal{I}, dv)$ と表す。

前提

以下 $(\mathcal{C}, m)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の有限加法的測度とする。

7.11 定義. $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A に対して次の量を A の**有限加法的測度** m **が誘導する外測度**(outer measure) という。

$$\gamma(m; A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n)\,;\, C_n \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}.$$

但し $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を満たす $\mathcal{C}$-集合列 C_n が存在しないときは $\gamma(m; A) = +\infty$ と約束する。

記号

$\mathbb{R}^d$ の部分集合全体の族を $\mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ という記号で表す。

関数 $\gamma(m; \cdot) : \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}$ の性質を調べる。

7.12 定義. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を満たす $\mathcal{C}$-集合列 C_n を集合 A の**可算** $\mathcal{C}$-**被覆**(covering) と呼ぶ。

7.13 補題. (i) $\gamma(m; A) \geq 0\ \forall A,\ \gamma(m; \emptyset) = 0.$
(ii) $A \subset B \Rightarrow \gamma(m; A) \leq \gamma(m; B).$
(iii) $\gamma(m; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; A_n).$
(iv) A の有限 $\mathcal{C}$-被覆 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ に対して $\gamma(m; A) \leq \sum_{i=1}^{n} m(C_i).$

証明. (i) m の非負値性により $\gamma(m;A) \geq 0$ である。次に $\emptyset \in \mathcal{C}$, $m(\emptyset) = 0$ であるから $C_n := \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ という可算 $\mathcal{C}$-被覆により $\gamma(m;\emptyset) = 0$ が実現されることが分かる。

(ii), (iv) は演習問題とする。

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) = +\infty$ なら不等式は自明に成立するので、$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) < +\infty$ の場合を考察する。$\varepsilon > 0$ とする。各 $n \in \mathbb{N}$ について、$\gamma(m;A_n) < +\infty$ なので A_n の可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_{nk} $k \in \mathbb{N}$ であって

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \gamma(m;A_n) + \varepsilon/2^n$$

を満たすものが存在する。さて $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であり、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk}, \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ。集合列 C_{nk} は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆であるから次の不等式が導かれた。

$$\gamma(m;\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) + \varepsilon.$$

この段階では $\varepsilon > 0$ はまったく任意なので結論を得る。 □

7.14 演習問題. (i) 補題 7.13(ii),(iv) を示せ。
(ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であることを示せ。

7.15 定理. Δ を空でない $\mathcal{C}$-集合からなる有限な非交叉族、$A, B, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ とする。
(i) $\bigcup_{J\in\Delta} J \subset A$ なら $\sum_{J\in\Delta} m(J) + \gamma(m; A \setminus \bigcup_{J\in\Delta} J) \leq m(A)$ である。
(ii) $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ なら $m(B) \leq \sum_{i=1}^{n} m(C_i)$ が成り立つ。特に $B \subset A$ なら $m(B) \leq m(A)$.
(iii) $\bigcup_{J\in\Delta} J \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ なら $\sum_{J\in\Delta} m(J) \leq \sum_{i=1}^{n} m(C_i)$ である。

証明. (i) 補題 7.4(i) によれば $A \setminus (\bigcup_{J\in\Delta} J)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ が存在する。従って

$$\sum_{J\in\Delta} m(J) + \gamma(m; A \setminus \bigcup_{J\in\Delta} J) \leq \sum_{J\in\Delta} m(J) + \sum_{I\in\Lambda} m(I) = m(A)$$

が補題 7.13(iv) と m の有限加法性により導かれる。

(ii) 系 7.5 によれば B の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ であって $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n}\{J \in \Lambda : J \subset C_i\}$ を満たすものが存在する。m の有限加法性と非負値性により

$$m(B) = \sum_{J\in\Lambda} m(J) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{J\in\Lambda:J\subset C_i} m(J)$$

が成り立つ。$\gamma(m;\cdot)$ の非負値性と (i) を使うと

$$\sum_{J\in\Lambda:J\subset C_i} m(J) \leq m(C_i)$$

故に求める不等式が得られる。

(iii) $J \in \Delta$ とする。$J \cap C_i$ $i = 1, 2, \dots, n$ は J の有限な $\mathcal{C}$-被覆であるから (ii) により

$$m(J) \le \sum_{i=1}^{n} m(J \cap C_i).$$

$i = 1, 2, \dots, n$ とする。$J \cap C_i$ $J \in \Delta$ は $\mathcal{C}$-集合からなる有限な非交叉族であるから (i) により

$$\sum_{J\in\Delta} m(J \cap C_i) = \sum_{J\in\Delta : J\cap C_i \ne \emptyset} m(J \cap C_i) \le m(C_i).$$

従って 2 重和の順序交換 $\sum_{J\in\Delta} \sum_{i=1}^{n} \cdots = \sum_{i=1}^{n} \sum_{J\in\Delta} \dots$ により結論を得る。 □

7.16 補題. $\mathcal{C}$-集合の列 C_n $n \in \mathbb{N}$ に対して集合族の列 Δ_n $n \in \mathbb{N}$ であって

$$\Delta_n \text{ は } \bigcup_{k=1}^{n} C_k \text{ の有限 } \mathcal{C}\text{-分割、} \Delta_n \subset \Delta_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

を満たすものが存在する。

7.17 演習問題. 補題 7.16 を示せ。（補題 7.4(ii) を考慮に入れて帰納法を適用せよ。）

7.18 系. 任意の $A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対して次が成り立つ。

$$\gamma(m; A) = \inf \Big\{ \sum_{J\in\Delta} m(J); \Delta \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \Big\}.$$

非交叉可算 $\mathcal{C}$-被覆が存在しないなら右辺は $+\infty$ と約束する。

証明. C_n $n \in \mathbb{N}$ を集合 A の可算 $\mathcal{C}$-被覆とする。それに対し集合族の列 Δ_n $n \in \mathbb{N}$ を補題 7.16 で述べられたものとする。このとき定理 7.15(iii) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J\in\Delta_n} m(J) \le \sum_{k=1}^{n} m(C_k)$$

である。さて $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は非交叉な A の可算 $\mathcal{C}$-被覆である。さらに次が成り立つ。

$$\sum_{J\in\Delta} m(J) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{J\in\Delta_n} m(J) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} m(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k).$$

即ち可算 $\mathcal{C}$-被覆が存在するなら効率を落さずに非交叉可算 $\mathcal{C}$-被覆を選ぶことができる。

$$\inf \Big\{ \sum_{J\in\Lambda} m(J); \Lambda \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \Big\} \le \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k).$$

C_n $n \in \mathbb{N}$ は集合 A の可算 $\mathcal{C}$-被覆である限り任意なので

$$\inf \Big\{ \sum_{J\in\Lambda} m(J); \Lambda \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \Big\} \le \gamma(m; A).$$

さて A が可算 $\mathcal{C}$-被覆をもたない場合は $\gamma(m; A) = +\infty$ なので、不等号は自明に成り立つ。逆向きの不等号の理由付けは演習問題とする。 □

7.19 演習問題. 系 7.18 の証明を完成させよ。

8 Carathéodory の外測度と可測集合

この節では補題 7.13 で述べられた有限加法的測度が誘導する外測度の性質 (i), (ii), (iii) を公理化して議論し、それによる測度の構成方法を紹介する。これは単なる一般化ではない。必ずしも有限加法的測度に由来しない外測度も応用上重要だからである。

8.1 定義. $\mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ を定義域にもつ関数 $\theta : \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき、θ は $\mathbb{R}^d$ 上の *Carathéodory* **外測度**であるという。

(i) $\theta(A) \geq 0\ \forall A,\ \theta(\emptyset) = 0$. **非負性**(non-negativity)
(ii) $A \subset B \Rightarrow \theta(A) \leq \theta(B)$. **単調性**(monotonicity)
(iii) $\theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n)$. **可算劣加法性**(countable subadditivity)

前提

以下 θ を $\mathbb{R}^d$ 上の Carathéodory 外測度とする。

8.2 定義. $A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ が *Carathéodory* **外測度** θ **に関して可測**(measurable)、略して θ-可測、であるとは次が成り立つことをいう。

$$\theta(B) = \theta(B \cap A) + \theta(B \cap A^{\mathrm{c}})\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

記号

θ-可測な $\mathbb{R}^d$ の部分集合全体の族を $\mathrm{Mble}(\theta)$ という記号であらわす。

8.3 補題. $A \in \mathrm{Mble}(\theta),\ B_1 \subset A,\ B_2 \cap A = \emptyset \Rightarrow \theta(B_1 \cup B_2) = \theta(B_1) + \theta(B_2)$.

証明. $(B_1 \cup B_2) \cap A = B_1,\ (B_1 \cup B_2) \cap A^{\mathrm{c}} = B_2$ を使う。 □

8.4 補題. $\mathcal{M}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族とする。次が成り立つなら $\mathcal{M}$ は σ-加法族である。

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$. (ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{M}$. (iii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.
(iv) $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

8.5 演習問題. 補題 8.4 を示せ。

8.6 補題. $\mathrm{Mble}(\theta)$ は σ-加法族であり、θ は $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上で σ-加法的である。

証明. $B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ とする。$B \cap \emptyset = \emptyset,\ B \cap \emptyset^{\mathrm{c}} = B,\ \theta(\emptyset) = 0$ であるから

$$\theta(B \cap \emptyset) + \theta(B \cap \emptyset^{\mathrm{c}}) = \theta(\emptyset) + \theta(B) = \theta(B)\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

従って $\emptyset \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。
$A \in \mathrm{Mble}(\theta)$ とする。$(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$ であるから

$$\theta(B \cap A^{\mathrm{c}}) + \theta(B \cap (A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}) = \theta(B \cap A) + \theta(B \cap A^{\mathrm{c}}) = \theta(B)\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

従って $A^{\mathrm{c}} \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。
　$A_1, A_2 \in \mathrm{Mble}(\theta)$ とする。次の関係に着目する。

$$\begin{aligned}&\{B \cap (A_1 \cup A_2)\} \cap A_1 = B \cap A_1,\ \{B \cap (A_1 \cup A_2)\} \cap (A_1)^{\mathrm{c}} = B \cap (A_1)^{\mathrm{c}} \cap A_2,\\ &B \cap (A_1 \cup A_2)^{\mathrm{c}} = B \cap (A_1)^{\mathrm{c}} \cap (A_2)^{\mathrm{c}}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

まず A_1 の θ-可測性を適用し次に A_2 の θ-可測性、再び A_1 の θ-可測性を使うと

$$\begin{aligned}&\theta(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \theta(B \cap (A_1 \cup A_2)^{\mathrm{c}})\\ &= \theta(B \cap A_1) + \theta(B \cap (A_1)^{\mathrm{c}} \cap A_2) + \theta(B \cap (A_1)^{\mathrm{c}} \cap (A_2)^{\mathrm{c}}) \qquad \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).\\ &= \theta(B \cap A_1) + \theta(B \cap (A_1)^{\mathrm{c}}) = \theta(B)\end{aligned}$$

従って $A_1 \cup A_2 \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。
　$A_n \in \mathrm{Mble}(\theta)\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m$ とする。

$$B \cap A_{n+1} \subset A_{n+1},\ B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \cap A_{n+1} = \emptyset$$

であるから A_{n+1} の θ-可測性に着目して補題 8.3 を使うと次が得られる。

$$\theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big)) = \theta(B \cap A_{n+1}) + \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big))\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

従って帰納法を適用し、その後 θ の単調性を使うと

$$\sum_{k=1}^{n} \theta(B \cap A_k) = \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) \leq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big))\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

各項は非負値なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta(B \cap A_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) \leq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)).$$

他方、θ は可算劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立している。よって

$$\theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(B \cap A_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big))\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d). \tag{8.8}$$

さてすでに証明されたことにより $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。従って各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\theta(B) = \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) + \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)^{\mathrm{c}}) \geq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) + \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)^{\mathrm{c}}).$$

ここで不等号は θ の単調性による。(8.8) をつかって

$$\theta(B) \geq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)) + \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)^{\mathrm{c}})\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

θ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立する。したがって

$$\theta(B)=\theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big))+\theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)^{\mathrm{c}})\ \forall B\in\mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$$

であるから $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathrm{Mble}(\theta)$ が導かれた。

以上で集合族 $\mathrm{Mble}(\theta)$ について補題 8.4 の前提条件がすべて確かめられたことになるので、$\mathrm{Mble}(\theta)$ は σ-加法族である。また (8.8) において $B=\mathbb{R}^d$ の場合が θ の $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上における σ-加法性にほかならない。 □

8.9 演習問題. (8.7) を確認せよ。

補題 8.6 の結論を言い換えてみよう。

8.10 定理. θ の $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上への制限は $\mathbb{R}^d$ 上の測度である。

ここで有限加法的測度が誘導する外測度についての議論に戻る。

前提

以下 $(\mathcal{C},m)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の有限加法的測度とする。

記号

$\mathrm{Mble}(\gamma(m;\cdot))$ を単に $\mathrm{Mble}(m)$ と書き $\gamma(m;\cdot)$ の $\mathrm{Mble}(m)$ への制限を $m^\star$ と書く。

このとき $(\mathrm{Mble}(m),m^\star)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の測度である。これと $(\mathcal{C},m)$ との関係を調べる。

8.11 定理. すべての $\mathcal{C}$-集合は $\gamma(m;\cdot)$-可測である。すなわち $\mathcal{C}\subset\mathrm{Mble}(m)$ である。

証明. $A\in\mathcal{C}$ とする。$B\in\mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対しその可算 $\mathcal{C}$-被覆が存在するならその一つを C_n $n\in\mathbb{N}$ とする。$C_n\cap A$ $n\in\mathbb{N}$ は集合 $B\cap A$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆であるから

$$\gamma(m;B\cap A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m(C_n\cap A).$$

他方、外測度 $\gamma(m;\cdot)$ の単調性と可算劣加法性により

$$\gamma(m;B\cap A^{\mathrm{c}})\le\gamma(m;\bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n\cap A^{\mathrm{c}}))\le\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(m;C_n\cap A^{\mathrm{c}}).$$

さて $C_n\cap A^{\mathrm{c}}=C_n\setminus(C_n\cap A)$ であるから定理 7.15 (i) によると

$$m(C_n\cap A)+\gamma(m;C_n\cap A^{\mathrm{c}})\le m(C_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$$

が成り立つ。従って以上を組み合わせると

$$\gamma(m;B\cap A)+\gamma(m;B\cap A^{\mathrm{c}})\le\sum_{n=1}^{\infty}m(C_n).$$

これがあらゆる B の可算 $\mathcal{C}$-被覆について満たされる。よって

$$\gamma(m; B \cap A) + \gamma(m; B \cap A^{\mathrm{c}}) \le \gamma(m; B)\ \forall B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

さて B が可算 $\mathcal{C}$-被覆をもたない場合は $\gamma(m; B) = +\infty$ なので、不等号は自明に成り立つ。$\gamma(m; \cdot)$ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立し $A \in \mathrm{Mble}(m)$ が導かれた。 □

8.12 定理. 以下はすべて同値である。
(i) $\gamma(m; A) = m(A)\ \forall A \in \mathcal{C}$.
(ii) m は σ-加法的
(iii) $A \in \mathcal{C}$ とその可算 $\mathcal{C}$-被覆 Δ で非交叉族であるものに対して $m(A) \le \sum_{J \in \Delta} m(J)$.

証明. 定理 8.11 により $\mathcal{C} \subset \mathrm{Mble}(m)$ である。従って定理 8.10 により

$$\mathcal{C}\text{-集合からなる可算非交叉族 } \Delta \text{ に対して } \gamma(m; \textstyle\bigcup_{J\in\Delta} J) = \sum_{J\in\Delta} \gamma(m; J).$$

これは Δ が $\mathcal{C}$-集合の可算 $\mathcal{C}$-分割になっている場合も含む。よって論理図式 (i) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ。次に A および Δ を (iii) にあるようなものとする。$\{J \cap A\,; J \in \Delta\}$ は $A \in \mathcal{C}$ の可算 $\mathcal{C}$-分割であるから、

$$m \text{ が } \sigma\text{-加法的なら } m(A) = \sum_{J\in\Delta} m(J \cap A) \le \sum_{J\in\Delta} m(J).$$

ここで不等号は定理 7.15(ii) による。よって論理図式 (ii) $\Rightarrow$ (iii) が成り立つ。系 7.18 によれば (iii) が成り立つなら $m(A) \le \gamma(m; A)\ \forall A \in \mathcal{C}$. 他方、補題 7.13 (iv) によれば逆向きの不等号も成り立っている。よって残りの論理図式 (iii) $\Rightarrow$ (i) が導かれた。 □

8.13 定義. 有限加法的測度 $(\mathcal{C}, m)$ に対して測度 $(\mathcal{B}, \mu)$ が存在して $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mu(A) = m(A)$ $\forall A \in \mathcal{C}$ が成り立つとき $(\mathcal{B}, \mu)$ は**有限加法的測度** $(\mathcal{C}, m)$ **の測度への拡張**という。

m が σ-加法的なら定理 8.11 と定理 8.12 により測度 $(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ は $(\mathcal{C}, m)$ の拡張である。その逆も正しいことの確認は演習問題とする。

8.14 演習問題. 測度に拡張可能な有限加法的測度は σ-加法的であることを示せ。

以上は次の形にまとめて表現され *Hopf* **の拡張定理**と呼ばれる。

8.15 定理. 有限加法的測度が測度に拡張されるための必要十分条件はそれが σ-加法的なことである。

測度論的構造が別の数学的構造と融合しているとき、それが測度論的性質に反映することが当然期待される。それを引き出すときに、集合族 $\mathcal{C}$ に着目する構造が取り込まれているという状況のもと、次の定理がよく利用される。

8.16 定理. m は σ-加法的であるとする。$A \in \mathrm{Mble}(m)$ かつ $m^\star(A) < +\infty$ なら、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して有限個の $\mathcal{C}$ 集合 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |1_A - \sum_{n=1}^{k} 1_{C_n}|\, m^\star < \varepsilon.$$

証明. Mble(m) 可測集合 A に対してその外測度をもって $m^\star(A)$ を決めるというのが定義であった。仮定より外測度 $m^\star(A)$ は有限値であるから、$\mathcal{C}$ 集合列 C_n が存在して次を満たす。

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < m^\star(A) + \varepsilon/2.$$

定理 8.12 より $m(C_n) = m^\star(C_n)$ である。補題 5.4 を考慮して定義関数を使って表現すると

$$1_A(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}(x) \, \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \, m^\star = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{C_n} \, m^\star < \int_{\mathbb{R}^d} 1_A \, m^\star + \frac{\varepsilon}{2}.$$

関数 $1_A, \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}$ はともに $m^\star$ 可積分なので定理 4.9 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \Big| m^\star = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} - 1_A \Big) m^\star = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \, m^\star - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A \, m^\star < \frac{\varepsilon}{2}.$$

他方 $\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < +\infty$ であるから、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n} \, m^\star = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{C_n} \, m^\star = \sum_{n=k+1}^{\infty} m(C_n) < \varepsilon/2.$$

定理 4.9 を適用して以上を組み合わせると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{k} 1_{C_n} \Big| m^\star \le \int_{\mathbb{R}^d} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \Big| m^\star + \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n} \, m^\star < \varepsilon.$$

集合 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ が求めるものである。 □

9　1 次元 Lebesgue 測度の存在

この節では 1 次元 Lebesgue 測度の存在を示し、その重要な応用例として 1 次元区間上の連続関数には必ず原始関数が存在することおよび微積分の基本定理を証明する。

前提

以下 $\mathcal{I}$ は左半開区間の全体に空集合 $\emptyset$ を付加した集合族を表し、$(\mathcal{I}, m)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限加法的測度とする。

9.1 補題. m は条件 $\inf_{\delta>0} m((a, a+\delta]) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ を満たすとする。このとき左半開区間の列 $(a_n, b_n] \ n \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ に対して次を満たすような正の実数列 δ_n が存在する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

証明. m に対する条件により

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists \delta_n > 0 \text{ s.t. } m((b_n, b_n + \delta_n]) < \varepsilon/2^n.$$

有限加法性により $m((a_n, b_n + \delta_n]) = m((a_n, b_n]) + m((b_n, b_n + \delta_n])$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \le \sum_{n=1}^{\infty} \{m((a_n, b_n]) + \varepsilon/2^n\}.$$

従って δ_n $n \in \mathbb{N}$ が求めるものである。 □

9.2 補題. K を有界な閉区間、J_n $n \in \mathbb{N}$ を開区間の列とする。$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ なら $K \subset \bigcup_{n=1}^{k} J_n$ を満たすような $k \in \mathbb{N}$ が存在する。

9.3 演習問題. 補題 9.2 を示せ。

9.4 補題. 条件 $\inf_{\delta>0} m((a, a+\delta]) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$ が成り立てば、$(\mathcal{I}, m)$ は σ-加法的である。

証明. 定理 8.12 によれば、$A \in \mathcal{I}$ とその可算 $\mathcal{I}$-被覆 Δ で非交叉族であるものに対して

$$m(A) \le \sum_{J \in \Delta} m(J)$$

が成り立つことを示せばよい。記号の複雑化を避けるために $A = (0, 1]$ として話を進める。また可算 $\mathcal{I}$-被覆 Δ は左半開区間の列 $(a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$ で表されるとしよう。$\varepsilon > 0$ とする。補題 9.1 の前提は満たされるので、次のような正の実数列 δ_n を見つけることができる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

他方、$m((0, \delta]) < \varepsilon$ を満たすような $\delta > 0$ も存在する。$(a_n, b_n] \subset (a_n, b_n + \delta_n)$ であるから

$$[\delta, 1] \subset (0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n + \delta_n).$$

補題 9.2 によれば、次を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$[\delta, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{k} (a_n, b_n + \delta_n).$$

従ってこのような k に対して

$$(0, 1] = (0, \delta) \cup [\delta, 1] \subset (0, \delta] \cup \bigcup_{n=1}^{k} (a_n, b_n + \delta_n].$$

右辺は左半開区間の有限合併であるから、定理 7.15(ii) により

$$m((0, 1]) \le m((0, \delta]) + \sum_{n=1}^{k} m((a_n, b_n + \delta_n]).$$

各項は非負値なので右辺は次でおさえられる。

$$m((0,\delta]) + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]).$$

従って

$$m((0,1]) \le 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

ε は $\varepsilon > 0$ である限り任意なので求める不等式を得た。 $\square$

付帯条件を付けると補題 9.4 の逆も正しい。

9.5 補題. $(\mathcal{I}, m)$ は条件 $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ s.t. $m((a, a+\delta]) < +\infty$ を満たすとする。このとき $(\mathcal{I}, m)$ が σ-加法的なら $\inf_{\delta>0} m((a, a+\delta]) = 0\ \forall a \in \mathbb{R}$ が成り立つ。

9.6 演習問題. 補題 9.5 を示せ。

ここで $\mathbb{R}$ 上の有限加法的測度で重要な例を思い出そう。

再確認

非減少関数 $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の誘導する $\mathbb{R}$ 上の有限加法的測度 dv とは

$$\mathcal{I} \to \overline{\mathbb{R}},\ J \mapsto v(\sup J) - v(\inf J).$$

但し空集合 $\emptyset$ に対しては値 0 を割り当てる。

$$\gamma(dv; A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (v(b_n) - v(a_n))\,;\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\}\ A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}).$$

$\mathrm{Mble}(\gamma(dv; \cdot))$ を単に $\mathrm{Mble}(dv)$ と書く。

9.7 定理. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき

$$(a, b] \in \mathrm{Mble}(dv), \gamma(dv; (a, b]) = v(b) - v(a)\ \forall a, \forall b \in \mathbb{R}, a < b.$$

即ち v の誘導する有限加法的測度 dv は測度に拡張される。

証明. 定理 8.15 によれば、v の誘導する有限加法的測度の σ-加法性を確かめればよい。補題 9.4 に述べられている条件は次のように表せる。

$$\inf_{\delta>0} \{v(a+\delta) - v(a)\} = 0\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

これは v の右連続性に他ならない。 $\square$

9.8 定義. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき $\mathbb{R}$ 上の測度

$$dv^{\star} : \mathrm{Mble}(dv) \to \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \gamma(dv; A)$$

を v の誘導する *Lebesgue-Stieltjes* **測度**、また $\gamma(dv; \cdot)$ を *Lebesgue-Stieltjes* **外測度**と呼ぶ。

約束

関数 $v : x \mapsto x$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度（外測度）を 1 **次元** *Lebesgue* **測度（外測度）**と呼ぶ。またこのとき Mble(dv)-集合を *Lebesgue* **可測集合**といい、σ 加法族 Mble(dv) に関して可測な関数は *Lebesgue* **可測関数**と呼ばれる。

定理 9.7 によりたしかに Lebesgue 測度は存在する。しかし Lebesgue 可測集合の正体が今ひとつはっきりしない。はたして連続関数は可測か？

9.9 補題. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を非減少関数とする。連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Mble(dv)-可測である。

証明. $x \in \mathbb{R}$ に対して $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$ とおく。$n \in \mathbb{N}$ とする。関数

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f([nx]/n)$$

について議論する。このとき次が成り立つ。

$$\mathrm{Image}\, f_n = \{f(k/n)\,;k \in \mathbb{Z}\},\ (f_n)^{-1}\{y\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}:f(k/n)=y} (k/n,(k+1)/n].$$

定理 8.11 によれば、$\mathcal{I} \subset \mathrm{Mble}(dv)$ である。従って

$$(f_n)^{-1}\{y\} \in \mathrm{Mble}(dv)\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Image f_n は可算集合であるから補題 2.9 とその後の注意により関数 f_n は Mble(dv)-可測である。さて f は連続であるから各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $f_n(x)$ は $f(x)$ に収束する。よって補題 5.1 により関数 f も Mble(dv)-可測である。 □

9.10 定義. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、f を Mble(dv) 可測関数とする。f が v の誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度 $dv^\star$ に関して可積分であるとき積分

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dv^\star$$

を f の v による *Lebesgue-Stieltjes* **積分**(Lebesgue-Stieltjes integral) と呼ぶ。

つぎの補題 9.11 および定理 9.12 は定理 6.12 の協力をうけて関数空間論において決定的な役割を果たす。

9.11 補題. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、$A \in \mathrm{Mble}(dv)$ とする。$dv^\star(A) < +\infty$ なら、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |1_A - f|\,dv^\star < \varepsilon.$$

証明. 関数 v は右連続であるから、定理 9.7 が適用できる。Mble(dv) 可測集合 A に対してその外測度をもって $dv^\star(A)$ を決めるというのが定義であった。仮定より外測度は有限であるから、定理 8.16 により有限個の区間 $(a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots, k$ が存在して次を満たす。

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{k} 1_{(a_n,b_n]} \Big| \, dv^\star < \varepsilon/2.$$

関数 v は右連続であったのである $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して

$$\sum_{n=1}^{k} (v(a_n + \delta) - v(a_n) + v(b_n + \delta) - v(b_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

必要なら δ を取り替えることにより以下も満たすようにできる。

$$a_n + \delta < b_n \, \forall n = 1, 2, \ldots, k.$$

ここで次の連続関数を導入する。

$$f_n(x) := \begin{cases} \max\{(x - a_n)/\delta, 0\} & x \leq a_n + \delta \\ \quad\quad 1 & a_n + \delta < x < b_n \\ \max\{(b_n - x)/\delta + 1, 0\} & x \geq a_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots, k.$$

連続関数の可測性は補題 9.9 で保証されている。定理 4.9, 補題 3.4(ii) と定理 9.7 により

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{n=1}^{k} 1_{(a_n,b_n]} - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big| dv^\star \\ &\leq \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} |1_{(a_n,b_n]} - f_n| dv^\star \leq \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} (1_{(a_n,a_n+\delta]} + 1_{(b_n,b_n+\delta]}) dv^\star \\ &= \sum_{n=1}^{k} (v(a_n + \delta) - v(a_n) + v(b_n + \delta) - v(b_n)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

従って定理 4.9 を適用して $(\star)$ と組み合わせると

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big| \, dv^\star \leq \int_{\mathbb{R}} \Big| 1_A - \sum_{n=1}^{k} 1_{(a_n,b_n]} \Big| \, dv^\star + \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{n=1}^{k} 1_{(a_n,b_n]} - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big| \, dv^\star < \varepsilon.$$

関数 $f := \sum_{n=1}^{k} f_n$ が求めるものである。 □

次の定理は、可積分な連続関数のなす空間が L^1 空間において稠密であることを主張している。これを L^1 **空間における連続関数の稠密性**というキーワードで引用することにしよう。

9.12 定理. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ を Mble(dv) 可測かつ $dv^\star$ 可積分とする。任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, dv^\star < \varepsilon.$$

証明. 補題 3.17 によれば、非負値 Mble(dv) 単関数列 f_n が存在して

$$f_n \le f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \max\{f(x), 0\}\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

定理 3.18 を適用すると

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dv^\star = \int_{\mathbb{R}} \max\{f,0\}\, dv^\star \le \int_{\mathbb{R}} |f|\, dv^\star < +\infty.$$

よってある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} \max\{f,0\}\, dv^\star < \int_{\mathbb{R}} f_k\, dv^\star + \varepsilon/4.$$

$h := f_k$ とおくとこれは $dv^\star$ 可積分な Mble(dv) 単関数で

$$0 \le h \le \max\{f,0\},\ \int_{\mathbb{R}} (\max\{f,0\} - h)\, dv^\star = \int_{\mathbb{R}} \max\{f,0\}\, dv^\star - \int_{\mathbb{R}} h\, dv^\star < \varepsilon/4.$$

次の不等式から $z \in \operatorname{Image} h$ かつ $z > 0$ なら $dv^\star(h^{-1}\{z\}) < +\infty$ であることがわかる。

$$z dv^\star(h^{-1}\{z\}) \le \int_{\mathbb{R}} h\, dv^\star < +\infty.$$

$\operatorname{Image} h$ の要素の個数は有限であるが、それを N とおく。補題 9.11 により $z \in \operatorname{Image} h,\ z > 0$ に対して連続関数 $g_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |1_{h^{-1}\{z\}} - g_z|\, dv^\star < \frac{\varepsilon}{4Nz}.$$

従って定理 4.9 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{z\in\operatorname{Image} h, z>0} z 1_{h^{-1}\{z\}} - \sum_{z\in\operatorname{Image} h, z>0} z g_z \Big|\, dv^\star \le \sum_{z\in\operatorname{Image} h, z>0} z \int_{\mathbb{R}} |1_{h^{-1}\{z\}} - g_z|\, dv^\star < \frac{\varepsilon}{4}.$$

関数 $g_+ := \sum_{z\in\operatorname{Image} h, z>0} z g_z$ は連続である。上の左辺は $\int_{\mathbb{R}} |h - g_+|\, dv^\star$ に等しいので

$$\int_{\mathbb{R}} |\max\{f,0\} - g_+|\, dv^\star \le \int_{\mathbb{R}} (\max\{f,0\} - h)\, dv^\star + \int_{\mathbb{R}} |h - g_+|\, dv^\star < \varepsilon/2.$$

関数 $-f$ に対して以上の議論が適用できるので、連続関数 $g_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |\max\{-f,0\} - g_-|\, dv^\star < \varepsilon/2.$$

関数 $g := g_+ - g_-$ が求めるものである。 □

約束

λ を 1 次元 Lebesgue 測度、f を Lebesgue 可測関数とする。f が *Lebesgue* **可積分**(Lebesgue integrable) とは λ 可積分であることをいう。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f\, \lambda$$

を f の *Lebesgue* **積分**(Lebesgue integral) と呼ぶ。

次の定理の応用範囲は、単に具体的にできる積分の評価にとどまらない。

9.13 定理. λ は Lebesgue 測度、$a<b$ かつ関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は連続かつ λ 可積分とする。
(i) 関数 $(a,b)\to\mathbb{R},\ x\mapsto \displaystyle\int_{(a,x]} f\,\lambda$ は f の原始関数である。**原始関数の存在**
(ii) 関数 f の原始関数の一つを $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ とすると極限 $\lim_{x\to a}F(x)$, $\lim_{x\to b}F(x)$ が存在し $\displaystyle\int_{(a,b)} f\,\lambda=\lim_{x\to b}F(x)-\lim_{x\to a}F(x)$ が成り立つ。**微積分の基本定理**

証明. (i) $c\in(a,b)$ における微分可能性を議論しよう。任意に $\varepsilon>0$ が与えられたとする。連続性により $\exists\delta>0$ s.t. $|y-c|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(c)|<\varepsilon$ となる。さて $c\le x<b$ のとき

$$\int_{(a,x]} f\,\lambda-\int_{(a,c]} f\,\lambda-f(c)(x-c)=\int_{(c,x]}(f-f(c))\,\lambda$$

より、定理 4.6(ii) を適用して $c\le x<\min\{c+\delta,b\}$ なら

$$\Big|\int_{(a,x]} f\,\lambda-\int_{(a,c]} f\,\lambda-f(c)(x-c)\Big|\le\int_{(c,x]}|f-f(c)|\,\lambda\le\varepsilon|x-c|$$

が成り立つことを得る。$\varepsilon|x-c|$ で抑えるという評価は $\max\{c-\delta,a\}<x\le c$ であっても有効である。よって $x\mapsto\displaystyle\int_{(a,x]} f\,\lambda$ は c において微分可能であり、微分係数は $f(c)$ に等しい。 □

9.14 演習問題. 定理 9.13(ii) を示せ。λ 可積分という条件が重要である。

9.15 補題. $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数、$a,c\in\mathbb{R}$, $c>0$ とする。このとき $1_{(a,a+c]}f$ は $(\mathrm{Mble}(dv),dv^\star)$-可積分であって次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+kc/n)\{v(a+(k+1)c/n)-v(a+kc/n)\}=\int_{(a,a+c]}f\,dv^\star.$$

証明. 記号の複雑化を避けるために $a=0$, $c=1$ として話を進める。f の $\mathrm{Mble}(dv)$-可測性は補題 9.9 で確認済みである。さて有界閉区間上の連続関数は有界である。従って

$$\exists M<+\infty\ \text{s.t.}\ |f(x)|\le M\ \forall x\in[0,1].$$

$\int_{\mathbb{R}}M1_{(0,1]}\,dv^\star=M(v(1)-v(0))<+\infty$ であるから定理 6.8 を適用して次が分かる。

$1_{(0,1]}f$ は $dv^\star$-可積分である。

補題 9.9 で登場した関数列 f_n を再び利用する。つぎの条件が成り立つ。

$$|1_{(0,1]}f_n(x)|\le M1_{(0,1]}(x)\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}1_{(0,1]}f_n(x)=1_{(0,1]}f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

従って定理 5.7 が適用できるので

$\int_{\mathbb{R}}1_{(0,1]}f_n\,dv^\star$ は $\int_{\mathbb{R}}1_{(0,1]}f\,dv^\star$ に収束する。

一方、

$$1_{(0,1]}f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)1_{(k/n,(k+1)/n]},\ dv((k/n,(k+1)/n]) = v((k+1)/n) - v(k/n)$$

であるから

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(0,1]}f_n\, dv^\star = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\{v((k+1)/n) - v(k/n)\}.$$

よって結論が導かれる。 □

9.16 例. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続な全単写で非減少なもの、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数、$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする。このとき次が成り立つ。但し右辺は Riemann 積分である。

$$\int_{(a,b]} f\, dv^\star = \int_{v(a)}^{v(b)} f(v^{-1}(x))\, dx.$$

証明. 記号の複雑化を避けるために $a = 0$, $b = 1$ として話を進める。λ を 1 次元 Lebesgue 測度、記号 $[\cdot]$ は補題 9.9 の証明で登場したものとしよう。関数列 $g_n : x \mapsto f([nv^{-1}(x)]/n)$ $n \in \mathbb{N}$ について議論する。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(v(0),v(1)]}g_n\, \lambda = \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\{v((k+1)/n) - v(k/n)\}.$$

あとは補題 9.15 と平行した論法により証明ができる。 □

9.17 演習問題. 例 9.16 の証明を完成させよ。

9.18 演習問題. Lebesgue 測度 λ と Riemann 可積分関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して以下を示せ。
(i) f は Lebesgue 可測である。
(ii) $\displaystyle\int_{(a,b]} f\, \lambda = \int_a^b f(x)\, dx$ $\forall a \forall b \in \mathbb{R}$ $a < b$. 但し右辺は Riemann 積分である。
(iii) f が λ-可積分 $\Leftrightarrow$ f の広義積分が絶対収束する
(iv) λ-可積分なとき、広義積分と $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\, \lambda$ は一致する。

10　拡張の一意性とその応用

Hopf の拡張定理によれば、σ-加法的な有限加法的測度は必ず測度に拡張される。この節では拡張の一意性について議論し、その応用として Lebesgue 測度の平行移動不変性を導く。

前提

$(\mathcal{C}, m)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法的な有限加法的測度とする。

$(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の測度で $(\mathcal{C}, m)$ を拡張する。さて $\mathcal{B}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族で $\mathcal{C}$ を含むもの、$(\mathcal{B}, \mu_1)$, $(\mathcal{B}, \mu_2)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度で $(\mathcal{C}, m)$ を拡張するものとする。問題はいつ $\mu_1 = \mu_2$ がいえるかである。そのための条件は、$(\mathcal{C}, m)$ および $\mathcal{B}$ 両方に関わることになる。

10.1 定義. $(\mathcal{C}, m)$ が σ-**有限**(σ-finite) であるとは $\mathbb{R}^d$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_n $n \in \mathbb{N}$ で $m(C_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在することをいう。

10.2 演習問題. $m^\star(\mathbb{R}^d) < +\infty$ であれば、m は σ-有限であることを示せ。

10.3 補題. $(\mathcal{C}, m)$ が σ-有限なら $\mathbb{R}^d$ の可算 $\mathcal{C}$-分割 Δ で $m(J) < \infty$ $\forall J \in \Delta$ をみたすものが存在する。

証明. C_n $n \in \mathbb{N}$ を σ-有限性の定義にあるもの、それに対し集合族の列 Δ_n $n \in \mathbb{N}$ を補題 7.16 で述べられたものとする。定理 7.15(iii) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J \in \Delta_n} m(J) \leq \sum_{k=1}^{n} m(C_k) < +\infty.$$

従って $\mathbb{R}^d$ の可算 $\mathcal{C}$-分割 $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は $m(J) < \infty$ $\forall J \in \Delta$ をみたす。 □

10.4 補題. $(\mathcal{B}, \mu)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の測度で $(\mathcal{C}, m)$ を拡張するものとする。即ち $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = m(A)$ $\forall A \in \mathcal{C}$. このとき $(\mathcal{C}, m)$ が σ-有限なら $\mu(A) = m^\star(A)$ $\forall A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ が成り立つ。

証明. 先ず次の不等式が成り立つことを示す。

$$(\star) \qquad \mu(A) \leq \gamma(m; A) \ \forall A \in \mathcal{B}.$$

C_n $n \in \mathbb{N}$ を A の可算 $\mathcal{C}$-被覆とする。$C_n \in \mathcal{B}$, $\mu(C_n) = m(C_n)$ である。補題 6.18 により

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n).$$

よって不等式 $(\star)$ が成り立つ。σ-有限性により補題 10.3 にあるような $\mathbb{R}^d$ の可算 $\mathcal{C}$-分割 Δ が存在する。$J \in \Delta$ としよう。$J \in \mathcal{B}$, $\mu(J) = m(J) < +\infty$ であるから

$$\mu(A \cap J) = \mu(J) - \mu(A^{\mathrm{c}} \cap J) \geq m(J) - \gamma(m; A^{\mathrm{c}} \cap J) \ \forall A \in \mathcal{B}.$$

ここで不等号は $(\star)$ を $A^{\mathrm{c}} \cap J \in \mathcal{B}$ に適用して導かれている。さらに $A \in \mathrm{Mble}(m)$ も仮定する。定理 8.11 と定理 8.12 により $J \in \mathrm{Mble}(m)$, $m^\star(J) = m(J) < +\infty$ であるから

$$m(J) - \gamma(m; A^{\mathrm{c}} \cap J) = m^\star(J) - m^\star(A^{\mathrm{c}} \cap J) = m^\star(A \cap J).$$

以上と μ, $m^\star$ 双方の σ-加法性により

$$\mu(A) = \sum_{J \in \Delta} \mu(A \cap J) \geq \sum_{J \in \Delta} m^\star(A \cap J) = m^\star(A) \ \forall A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m).$$

さて $A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ に対しては $(\star)$ の右辺は $m^\star(A)$ に等しいので結論を得る。 □

補題 10.4 ではふたつの σ-加法族の共通部 $\mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ が現れた。実はそのようなものは σ-加法族である。例えば有限加法的測度を複数扱うとなるとそれに応じて σ-加法族も複数現れることになるので一般的な定式化を行う。

10.5 補題. $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族たち $\mathcal{B}_\alpha$ に対してそれらの共通部 $\bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ も σ-加法族である。

証明. (i) $\emptyset \in \mathcal{B}_\alpha\ \forall\alpha$ であるから、$\emptyset \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ である。

(ii) $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ とする。これは $A \in \mathcal{B}_\alpha\ \forall\alpha$ を意味する。各 $\mathcal{B}_\alpha$ は σ-加法族なので、$A^c \in \mathcal{B}_\alpha$ である。これが任意の α について成り立つので $A^c \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ が導かれる。

(iii) $A_n \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$ とする。これは $A_n \in \mathcal{B}_\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall\alpha$ を意味する。各 $\mathcal{B}_\alpha$ は σ-加法族なので、$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}_\alpha$ である。α は任意なので $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ が導かれる。 □

10.6 系. $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族 $\mathcal{A}$ に対して次の条件を満たす集合族がただ一つ存在する。

(i) $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族かつ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ である。
(ii) 条件 (i) を満たす任意の集合族 $\mathcal{B}'$ に対して $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ である。**最小性**

証明. 先ず $\mathcal{A}$ を内包する $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族は存在する。実際、$\mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ がそうである。そこで条件 (i) を満たす任意の集合族たちすべての共通部をとれば、それは補題 10.5 により σ-加法族である。しかもそれは条件 (ii) も満たす。一意性の確認は読者にゆだねる。 □

10.7 定義. $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族 $\mathcal{A}$ に対し系 10.6 で規定される σ-加法族を記号 $\sigma(\mathcal{A})$ で表し、これを $\mathcal{A}$ **で生成される** σ-**加法族**(σ-field generated by $\mathcal{A}$) と呼ぶ。

次の定理は有限加法的測度の測度への**拡張の一意性**を述べるもので、考察の対象となる測度の性質を調べたり逆にそれを利用して測度を特定したりするのにきわめて有効である。

10.8 定理. σ-有限な $(\mathcal{C}, m)$ の $\sigma(\mathcal{C})$ への測度としての拡張は一意的である。すなわち $\mathbb{R}^d$ 上の測度 $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ が $(\mathcal{C}, m)$ を拡張するなら $\mu(A) = m^\star(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{C})$ が成り立つ。

証明. $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Mble}(m)$ であるから、補題 10.4 より直ちに導かれる。 □

約束

以下 $\mathcal{I}$ は左半開区間の全体に空集合 $\emptyset$ を付加した集合族を表す。

10.9 定義. $\mathbb{R}$ 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{I})$ を *Borel* **集合族**(Borel σ-field) と呼び記号 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ で表す。$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-集合を *Borel* **集合**(Borel set) という。$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測な関数は *Borel* **可測関数**とも呼ばれる。また $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を定義域とする $\mathbb{R}$ 上の測度を *Borel* **測度**(Borel measure) という。さらに $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度 μ で条件 $\mu(J) < +\infty\ \forall J \in \mathcal{I}$ を満たすものを *Radon* **測度**(Radon measure) という。

次の定理は *Lebesgue-Stieltjes* **測度の一意性**を述べるものである。

10.10 定理. $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき v の誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度 $dv^\star$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限は、次を満たす唯一の $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度である。

$$\mu((a,b]) = v(b) - v(a)\ \forall a \forall b : a < b$$

証明. 関数 v の誘導する有限加法的測度は

$$dv((-n,n]) = v(n) - v(-n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$$

を満たすので σ-有限である。よって定理 9.7 と定理 10.8 をくみあわせて結論を得る。 $\square$

10.11 補題. μ を $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度、$t \in \mathbb{R}$ とする。
(i) $A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つ。ただし $A + t := \{x + t\,; x \in A\}$.
(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \mu(A + t)$ は $\mathbb{R}$ 上の測度である。

証明. (i) 次が成り立つから集合族 $\mathcal{B} := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}) : A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ は σ-加法族である。

$$(10.12) \qquad \emptyset + t = \emptyset,\ A^{\mathrm{c}} + t = (A + t)^{\mathrm{c}},\ \Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) + t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + t).$$

また $(a, b] + t = (a + t, b + t]$ であるから $\mathcal{B}$ は $\mathcal{I}$ を含む σ-加法族である。$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ はそのようなものの最小であったので $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ 即ち $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が導かれる。
(ii) σ-加法性を確かめればよいがこれは演習問題とする。 $\square$

10.13 演習問題. (10.12) を示せ。また補題 10.11(ii) を示せ。

1 次元 Lebesgue 測度の著しい特徴は**平行移動不変性**(translation invariance) である。それだけでなく平行移動不変性な $\mathbb{R}$ 上の測度は実質上 Lebesgue 測度だけなのである。以上が定理 10.14 の内容である。この性質ゆえ Lebesgue 測度は解析学において特別な役割を果たす。その典型例が定理 9.13 で述べた微積分の基本定理である。

10.14 定理. λ を 1 次元 Lebesgue 測度、μ を $\mathbb{R}$ 上の Radon 測度とする。
(i) $\lambda(A + t) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall t \in \mathbb{R}$.
(ii) $\mu(A + t) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu(A) = \mu((0, 1])\lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

証明. (i) 補題 10.11 で見たように $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \lambda(A + t)$ は $\mathbb{R}$ 上の測度である。しかも

$$\lambda((a, b] + t) = \lambda((a + t, b + t]) = b - a\ \forall a, \forall b, a < b.$$

ゆえに定理 10.10 を適用して (i) を得る。
(ii) $(0, +\infty)$ 上の関数 $t \mapsto \mu((0, t])$ は右連続である。さらに有限加法性と仮定により

$$\mu((0, t + s]) = \mu((0, t]) + \mu((t, t + s]) = \mu((0, t]) + \mu((0, s])\ \forall t > 0 \forall s > 0.$$

よって $\mu((0, t]) = \mu((0, 1])t\ \forall t > 0$ が導けるがその実行は演習問題とする。これを使うと

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b - a]) = \mu((0, 1])(b - a)\ \forall a, \forall b, a < b.$$

再び定理 10.10 を適用して (ii) を得る。 $\square$

10.15 演習問題. 関数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ は条件 $f(t + s) = f(t) + f(s)\ \forall t\ \forall s$ を満たしかつ右連続であるとする。このとき $f(t) = f(1)t\ \forall t$ であることを示せ。

11　直積測度としての 2 次元 Lebesgue 測度

この節では測度の直積とその一意性について議論する。その応用として 2 次元 Lebesgue 測度の存在を示しさらに Lebesgue 測度の平行移動および回転不変性を導く。また直積測度は確率論における独立性の概念と密接に結びついている。

前提

$(\mathcal{C}_1, m_1)$ を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の有限加法的測度、$(\mathcal{C}_2, m_2)$ を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の有限加法的測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。

記号

$\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の部分集合族 $\mathcal{C}_1$ と $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の部分集合族 $\mathcal{C}_2$ に対して $\mathbb{R}^d$ 上の部分集合族を以下で導入する。

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{A \times B\,; A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$$

集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に属する集合を $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ **長方形集合**(rectangular set) という。

11.1 補題. $\mathbb{R}^d$ 上の集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化が成り立つ。

証明. まず $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。次に $A_1, B_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2, B_2 \in \mathcal{C}_2$ とする。このとき

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2.$$

よって集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化 (i) が成り立つ。他方 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ かつ $A_1 \times A_2 \neq \emptyset$ と仮定しよう。このとき $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ および

$$(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2) = (A_1 \times (B_2 \setminus A_2)) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times B_2)$$

が成り立ち、右辺は非交叉な合併である。さて $B_1 \setminus A_1$ の有限な $\mathcal{C}_1$-分割 Δ_1 と $B_2 \setminus A_2$ の有限な $\mathcal{C}_2$-分割 Δ_2 が存在する。

$$\{A_1 \times J\,; J \in \Delta_2\} \cup \{I \times B_2\,; I \in \Delta_1\}$$

が補題 7.2 の公理化 (ii) を成立させる有限な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$-分割である。 □

記号

$\mathrm{proj}_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d(1)}$, $\mathrm{proj}_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d(2)}$ は次で定義される写像を表す。

$$\mathrm{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \quad \mathrm{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

11.2 補題. $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{C}_1$, $\mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{C}_2$, $A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$.

証明. $A_1 \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^{d(1)})$, $A_2 \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^{d(2)})$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\mathrm{proj}_1(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_1 & \text{if } A_2 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_2 = \emptyset \end{cases}, \quad \mathrm{proj}_2(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_2 & \text{if } A_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_1 = \emptyset \end{cases}.$$

$A_1 \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A_2 = \emptyset$ であるから結論を得る。 □

記号

$m_1 \times m_2 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ は約束 $0\infty = 0$ のもと次で定義される関数を表す。

$$A \mapsto m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A)$$

11.3 補題. m_1, m_2 ともに σ-加法的なら、関数 $m_1 \times m_2 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ は σ-加法的な $\mathbb{R}^d$ 上の有限加法的測度である。

証明. (i) まず補題 11.1 により集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化が成り立つ。

(ii) 定義より $(m_1 \times m_2)(A) = m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。また $(m_1 \times m_2)(\emptyset) = m_1(\emptyset) m_2(\emptyset) = 0$ である。

(iii) Δ を $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ の可算な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$-分割とする。このとき補題 11.2 により

$$1_A(x, y) = 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 A}(y), 1_J(x, y) = 1_{\mathrm{proj}_1 J}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 J}(y)$$

であるから次が成り立つ。

$$1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 A}(y) = \sum_{J \in \Delta} 1_{\mathrm{proj}_1 J}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 J}(y)\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}\ \forall y \in \mathbb{R}^{d(2)}.$$

σ-加法性により $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の測度 $(\mathrm{Mble}(m_2), m_2^\star)$ は $(\mathcal{C}_2, m_2)$ を拡張する。各 $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ に対し非負値な $\mathrm{Mble}(m_2)$-可測関数

$$\mathbb{R}^{d(2)} \to \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 A}(y)$$

の $m_2^\star$ についての積分を補題 5.4 を適用して評価すると

$$1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) m_2^\star(\mathrm{proj}_2 A) = \sum_{J \in \Delta} 1_{\mathrm{proj}_1 J}(x) m_2^\star(\mathrm{proj}_2 J)\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。$m_2^\star(I) = m_2(I)\ \forall I \in \mathcal{C}_2$ を使って両辺を次のように書き換える。

$$m_2(\mathrm{proj}_2 A) 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\mathrm{proj}_2 J) 1_{\mathrm{proj}_1 J}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}.$$

他方、$\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の測度 $(\mathrm{Mble}(m_1), m_1^\star)$ は $(\mathcal{C}_1, m_1)$ を拡張する。非負値な $\mathrm{Mble}(m_1)$-可測関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto m_2(\mathrm{proj}_2 A) 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x)$$

の $m_1^\star$ についての積分を再び補題 5.4 を適用して評価すると

$$m_2(\mathrm{proj}_2 A) m_1^\star(\mathrm{proj}_1 A) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\mathrm{proj}_2 J) m_1^\star(\mathrm{proj}_1 J).$$

$m_1^\star(I) = m_1(I)\ \forall I \in \mathcal{C}_1$ および $m_1 \times m_2$ の定義により左辺は $(m_1 \times m_2)(A)$ に等しく右辺は $\sum_{J \in \Delta} (m_1 \times m_2)(J)$ に等しい。よって σ-加法性も確かめられた。 □

11.4 系. m_1, m_2 ともに σ-加法的なら、$\mathbb{R}^d$ 上の測度 $(\mathrm{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^\star)$ は有限加法的測度 $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ を拡張する。

証明. 定理 8.15 と補題 11.3 による。 □

約束

λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。一般に測度は σ-加法的な有限加法的測度でもあるので、$\mathbb{R}^2$ 上の σ-加法的な有限加法的測度 $(\mathrm{Mble}(\lambda) \times \mathrm{Mble}(\lambda), \lambda \times \lambda)$ に対して、系 11.4 が適用できる。$\mathbb{R}^2$ 上の測度 $(\mathrm{Mble}(\lambda \times \lambda), (\lambda \times \lambda)^\star)$ を **2 次元 *Lebesgue* 測度**、$\mathrm{Mble}(\lambda \times \lambda)$-集合を **2 次元 *Lebesgue* 可測集合**という。

11.5 定義. $\mathcal{B}_1$ を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ-加法族、$\mathcal{B}_2$ を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ-加法族とする。このとき $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ を**直積 σ-加法族**(product σ-field) と呼び記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で表す。また $\mathcal{B}_1$ を定義域とする $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の測度 μ_1 と $\mathcal{B}_2$ を定義域とする $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の測度 μ_2 について $(\mu_1 \times \mu_2)^\star$ の $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ への制限を**直積測度**(product measure) と呼び $\mu_1 \otimes \mu_2$ で表すことが多い。

11.6 注意. $\mathrm{Mble}(\lambda) \otimes \mathrm{Mble}(\lambda) \subset \mathrm{Mble}(\lambda \times \lambda)$ であることは定義から直ちに分かる。両者は一致しないことが知られている。

系 11.4 によりたしかに 2 次元 Lebesgue 測度は存在するが、やはり Lebesgue 可測集合の正体がつかみきれない。そこで σ-有限性のもとでの一意性を論じる。まず**直積測度の一意性**(uniqueness of product measure) についてのべる。

11.7 定理. $(\mathcal{C}_1, m_1)$, $(\mathcal{C}_2, m_2)$ はともに σ-加法的かつ σ-有限とする。このとき $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ で定義された $\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A)\ \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$$

を満たすものは $(\mathrm{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^\star)$ の $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ 上への制限に等しい。

証明. $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ は σ-有限となるので定理 10.8 より直ちに導かれる。 □

11.8 系. $(\mathcal{B}_1, \mu_1)$ を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ-有限な測度、$(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ-有限な測度とする。このとき $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で定義された $\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = \mu_1(\mathrm{proj}_1 A) \mu_2(\mathrm{proj}_2 A)\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$$

を満たすものがただひとつ存在し、それは直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ である。

約束

以下 $\mathcal{I}$ は左半開区間の全体に空集合 $\emptyset$ を付加した集合族を表す。

11.9 定義. $\mathbb{R}^2$ 上の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ を **2 次元 *Borel* 集合族**(2-dimensional Borel σ-field) と呼び記号 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ で表す。$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-集合を **2 次元 *Borel* 集合**という。$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測な関数は ***Borel* 可測関数**とも呼ばれる。また $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を定義域とする $\mathbb{R}^2$ 上の測度を ***Borel* 測度**という。さらに $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度 μ で条件 $\mu(J) < +\infty\ \forall J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ を満たすものを ***Radon* 測度**という。(一般の $\mathbb{R}^d$ でも同様のものを考えるが詳細は省略する。)

2 次元 *Lebesgue* 測度の一意性(uniqueness of Lebesgue measure) は次のように表現できる。

11.10 定理. 2 次元 Lebesgue 測度の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ への制限は、

$$\mu((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ \forall a_1 \forall b_1 \forall a_2 \forall b_2 : a_1 < b_1, a_2 < b_2$$

を満たす唯一の $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度である。

証明. λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。系 11.4 によれば、2 次元 Lebesgue 測度 $(\lambda \times \lambda)^\star$ は

$$(\lambda \times \lambda)^\star(A) = \lambda(\mathrm{proj}_1 A)\lambda(\mathrm{proj}_2 A)\ \forall A \in \mathrm{Mble}(\lambda) \times \mathrm{Mble}(\lambda)$$

を満たす。$\mathcal{I} \subset \mathrm{Mble}(\lambda)$ であったので、$(\lambda \times \lambda)^\star$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ への制限は所定の条件を満たす。従って存在が分かる。次に μ を所定の条件を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度としよう。また、m を 1 次元 Lebesgue 測度の $\mathcal{I}$ への制限で与えられる有限加法的測度としよう。ともに $\mathbb{R}^2$ 上の σ-有限な有限加法的測度 $(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, m \times m)$ を拡張するので

$$\mu(A) = (m \times m)^\star(A) = (\lambda \times \lambda)^\star(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

が定理 11.7 により成り立つ。 □

平行移動に関して 1 次元の場合と同様の性質が成り立つ。多次元においては回転が重要な役割を果たすのでまとめて議論するために少し一般的に設定する。次の補題は、次節以降で述べる Fubini の定理の応用に際しても重要である。

11.11 補題. (i) $\mathbb{R}^{d(1)}$ の可算 $\mathcal{C}_1$ 被覆と $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 $\mathcal{C}_2$ 被覆が存在するなら $\mathbb{R}^d$ 上の σ 加法族 $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ と $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ は一致する。
(ii) m_1, m_2 はともに σ-加法的かつ σ-有限とする。μ_1 を $m_1^\star$ の $\sigma(\mathcal{C}_1)$ への制限、μ_2 を $m_2^\star$ の $\sigma(\mathcal{C}_2)$ への制限とすると $\mu_1 \otimes \mu_2$ は $(m_1 \times m_2)^\star$ を $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ に制限したものである。

証明. (i) まず $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ である。右辺は $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ を含む σ-加法族であるがそのようなものの最小が $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ を得る。
次の集合族 $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ-加法族である。

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^{d(1)}) : A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)\}.$$

$A \in \mathcal{C}_1$ について $A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ はいえないかもしれないが、$\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 $\mathcal{C}_2$ 被覆が存在するので、$A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ は真である。従って $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}_1$ を含む σ-加法族となるが、そのようなものの最小が $\sigma(\mathcal{C}_1)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}$ である。すなわち

$$A \in \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2).$$

同様に $B \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \mathbb{R}^{d(1)} \times B \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ も成り立つ。以上より

$$A \in \sigma(\mathcal{C}_1), B \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow A \times B = (A \times \mathbb{R}^{d(2)}) \cap (\mathbb{R}^{d(1)} \times B) \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2).$$

従って $\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)$ は σ-加法族 $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ に含まれる。$\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)$ で生成される σ-加法族が $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ を得る。
(ii) (i) により $\mu_1 \otimes \mu_2$ は定理 11.7 の条件を満たす。 □

11.12 演習問題. 補題 11.11 の証明に登場した集合族 $\mathcal{B}$ は σ-加法族であることを示せ。

11.13 系. (i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(ii) λ を 1 次元 Lebesgue 測度の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限とする。このとき $\lambda \otimes \lambda$ は 2 次元 Lebesgue 測度を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に制限したものである。

証明. 補題 11.11 から直ちに分かる。 □

警告

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なら $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるが、一般には $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ から $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ や $\mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ は従わない。

11.14 補題. $\mathbb{R}^2$ の開部分集合全体で生成される σ-加法族は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と一致する。

証明. $\mathbb{R}$ の開区間全体を $\mathcal{U}$ とあらわす。次に着目する。

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b+1/n) \in \sigma(\mathcal{U}),\ (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b-1/n] \in \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

左から $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{U})$ が分かり、右から $\sigma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が分かる。よって

$$\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ここで補題 11.11 と系 11.13 を適用して

$$\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U}) \otimes \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

次に $\mathbb{R}^2$ の開部分集合全体を $\mathcal{O}$ とあらわす。$(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$-集合はすべて $\mathcal{O}$-集合であるから、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{O}).$$

他方、Lindelöf の被覆定理によれば

(11.15) 任意の $\mathbb{R}^2$ の開部分集合は $(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$-集合の可算合併である。

したがって任意の $\mathcal{O}$-集合は σ-加法族 $\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ に属する。$\mathcal{O}$ で生成される σ-加法族が $\sigma(\mathcal{O})$ なので $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を得る。 □

11.16 演習問題. (11.15) を Lindelöf の被覆定理を引用せずに直接示せ。

11.17 補題. 連続関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。

証明. $a \in \mathbb{R}$ とする。連続性より $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < a\}$ は開集合である。従って補題 11.14 を適用して $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が導ける。 □

11.18 補題. μ を $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度、$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を連続写像とする。
(i) $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が成り立つ。任意の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して合成関数 $f \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ も $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。
(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A))$ は $\mathbb{R}^2$ 上の測度である。

証明. (i) 次の集合族は $\mathbb{R}^2$ 上の σ-加法族である。(これを示すのは演習問題とする。)

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^2) : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}.$$

φ の連続性と補題 11.14 により

$$U\ \mathbb{R}^2 \text{ の開部分集合} \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \text{ 開集合} \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

従って任意の開部分集合は σ-加法族 $\mathcal{B}$ に属する。補題 11.14 によれば開部分集合全体が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を生成するので $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}$ を得る。すなわち

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

つぎに f の可測性により $\{y \in \mathbb{R}^2 : f(y) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall a \in \mathbb{R}$ である。よって

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : f(\varphi(x)) < a\} = \varphi^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^2 : f(y) < a\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall a \in \mathbb{R}$$

が導かれる。すなわち $f \circ \varphi$ も $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。(ii) を示すのは演習問題とする。 □

11.19 演習問題. (i) 補題 11.18 の証明で登場した $\mathcal{B}$ は σ-加法族であることを示せ。
(ii) 補題 11.18(ii) を示せ。

Lebesgue 測度と平行移動との関連は高次元の場合にも成り立つ。即ち次に述べるように 2 次元 Lebesgue 測度は**平行移動不変性**を持ち、逆に平行移動不変な $\mathbb{R}^2$ 上の測度は実質上 2 次元 Lebesgue 測度だけなのである。

11.20 定理. $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度、μ を $\mathbb{R}^2$ 上の Radon 測度とする。
(i) $\lambda^{(2)}(A+t) = \lambda^{(2)}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall t \in \mathbb{R}^2$.
(ii) $\mu(A+t) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}\ \forall t \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mu(A) = \mu((0,1] \times (0,1])\lambda^{(2)}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

証明. (i) 補題 11.18 により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \lambda^{(2)}(A+t)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の測度である。さて

$$\mathrm{proj}_1(J+t) = \mathrm{proj}_1 J + t_1, \mathrm{proj}_2(J+t) = \mathrm{proj}_2 J + t_2\ \forall J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$$

である。よって λ を 1 次元 Lebesgue 測度とすると、各 $J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ に対して

$$\lambda^{(2)}(J+t) = \lambda(\mathrm{proj}_1 J + t_1)\lambda(\mathrm{proj}_2 J + t_2) = \lambda(\mathrm{proj}_1 J)\lambda(\mathrm{proj}_2 J) = \lambda^{(2)}(J).$$

ゆえに定理 11.10 を適用して (i) を得る。(ii) を示すのは演習問題とする。 □

11.21 演習問題. 定理 11.20(ii) を示せ。(ヒント　関数 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \mu((0,t] \times (a,b])$ は右連続かつ $f(t+s) = f(t) + f(s)\ \forall t, \forall s$ を満たすことをまず示せ。)

平行移動はユークリッド距離を保存する。これが Lebesgue 測度の平行移動不変性を導いているのだが、その観点からの証明を与えるには更に高度な概念を必要とするのでここでは割愛する。さて高次元空間では別のタイプの距離を保存する変換が存在する。それは回転である。

記号

2 次元直交写像の全体を $O(2)$ と表す。

以下に述べるように 2 次元 Lebesgue 測度は**回転不変**(rotation invariant) である。これを平行移動不変な $\mathbb{R}^2$ 上の測度は実質上 Lebesgue 測度に限られるという事実に帰着して示そう。

11.22 定理. 2 次元 Lebesgue 測度 $\lambda^{(2)}$ は $\lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = \lambda^{(2)}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall \varphi \in O(2)$ を満たす。

証明. $\varphi \in O(2)$ とする。$\mathbb{R}^2$ 上の測度 $A \mapsto \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A))$ は Radon 測度である。他方

$$\varphi^{-1}(A+t) = \varphi^{-1}(A) + \varphi^{-1}(t)$$

であるから定理 11.20(i) を適用して

$$\lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A+t)) = \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A))\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\ \forall t \in \mathbb{R}^2$$

を得る。従って定理 11.20(ii) の仮定が満たされる。よって

$$\exists c \geq 0 \text{ s.t. } \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = c\lambda^{(2)}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

特に、$\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとするとき、開集合 $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ については

$$\varphi^{-1}(A) = A, 0 < \lambda^{(2)}(A) < +\infty \tag{11.23}$$

なので $c = 1$ を得る。 □

11.24 演習問題. (11.23) を示せ。

12 Dynkin 族定理

直積測度の構造をその断面から観察するのが Fubini の定理である。それに向けてのお膳立てを行うのがこの節の目的である。可測性に関する概念が多変数になることにより込み入ったものになるが、結局は直積という概念から逸脱するものではないことが判明する。通常は、単調族の概念を利用することが多いが、ここでは確率論において様々な場面で利用される Dynkin 族定理を紹介する。

前提

$(\mathcal{B}_1, \mu_1)$ を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ-有限な測度、$(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ-有限な測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 σ-加法族を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ 上の一意的な測度である。系 11.8 を参照

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

12.1 補題. $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ とする。
(i) 各 $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(2)} \to \mathbb{R},\ y \mapsto 1_A(x, y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。
(ii) 各 $y \in \mathbb{R}^{d(2)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1_A(x, y)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

証明. (i) 次が $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族でしかも $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含むことを示すのは演習問題とする。

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) : y \mapsto 1_A(x,y)\ \mathcal{B}_2\text{-可測}\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}\}.$$

そのようなものの最小が $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ なので $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ すなわち

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Rightarrow y \mapsto 1_A(x,y)\ \mathcal{B}_2\text{-可測}\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。(ii) を示すには x, y の役割を入れ替えればよい。 □

12.2 演習問題. 補題 12.1 の証明に登場した $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む σ-加法族であることを示せ。

12.3 系. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とする。
(i) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1_A(x,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である。
(ii) 各 $y \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1_A(x,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である。

証明. 系 11.13(i) と補題 12.1 から従う。 □

今までの経験からすると次の集合族は $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む σ-加法族であるように思われる。

$$\left\{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy)\ \text{は}\ \mathcal{B}_1\text{-可測}\ \right\}.$$

しかしこれがかなり手強いしろものでその証明を与える補題 12.11 は Fubini の定理において中心をなすものとなる。見通しよく議論するのには新しい概念を導入する必要がある。

12.4 定義. $\mathcal{D}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合族とする。それが次の条件を満たすとき *Dynkin* **族**(Dynkin system) をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{D}$.
(ii) $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$, $A \supset B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$.
(iii) $A_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}$.

任意の $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族は Dynkin 族である。付帯条件を付けると逆も正しい。

12.5 補題. $\mathcal{D}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族とする.
(i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ かつ $A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$ なら $\mathcal{D}$ は σ-加法族である。
(ii) 任意の $B \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\}$ は Dynkin 族である。

証明. (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ と Dynkin 族の条件 (ii) より

$$A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} = \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{D}.$$

次に上のことと仮定 $A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$ より

$$A \in \mathcal{D},\ B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B = (A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}.$$

従って $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{D}$ である。他方 $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ が成り立つので、Dynkin 族の条件 (iii) より

$$A_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \Big) \in \mathcal{D}.$$

(ii) まず $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{D}$ である。次に $A_1 \cap B \in \mathcal{D}$, $A_2 \cap B \in \mathcal{D}$, $A_1 \supset A_2$ とすると

$$(A_1 \setminus A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) \in \mathcal{D}$$

である。最後に $A_n \cap B \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ とすると

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \mathcal{D}$$

が導かれる。よって Dynkin 族の条件がすべて確認できた。 □

補題 10.5 でのべたように $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族たちの共通部は σ-加法族である。これと同じことが Dynkin 族についてもいえる。

12.6 補題. (i) $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族たち $\mathcal{D}_\alpha$ に対しそれらの共通部 $\bigcap_\alpha \mathcal{D}_\alpha$ も Dynkin 族である。(ii) $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族 $\mathcal{A}$ に対し $\mathcal{A}$ を含む $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族たちに最小のものが存在する。

証明の実行は補題 10.5 のそれと同じすじなので演習問題とする。

12.7 演習問題. 補題 12.6 を示せ。

12.8 定義. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合の族とする。$\mathcal{A}$ を含む $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族で最小のものを $\mathcal{A}$ **で生成される** *Dynkin* **族**と呼ぶ。

12.9 補題. $\mathcal{C}$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合族で次の条件を満たすものとする。

$$A \cap B \in \mathcal{C}\ \forall A \in \mathcal{C}\ \forall B \in \mathcal{C}.$$

$\mathcal{C}$ で生成される $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族を $\mathcal{D}$ とすると $A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$ が成り立つ。

証明. $\mathcal{D}$ は Dynkin 族なので補題 12.5(ii) および補題 12.6(i) により

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{C}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\}$$

は $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族である。$\mathcal{C}$ に対する条件と関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ により

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}\ \forall B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{C}.$$

従って集合族 $\mathcal{D}_1$ は $\mathcal{C}$ を含む Dynkin 族である。$\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ すなわち $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{C}$ を得る。これは次と同値である。

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}.$$

A, B の役割を入れ替えてみよう。

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}.$$

よって次の集合族は $\mathcal{C}$ を含む。

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathrm{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}\}.$$

しかも $\mathcal{D}_1$ に対するのと同じ根拠により集合族 $\mathcal{D}_2$ は Dynkin 族である。$\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_2$ すなわち $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$ を得る。 □

次は *Dynkin* **族定理**と呼ばれる。

12.10 定理. $\mathbb{R}^d$ の部分集合族 $\mathcal{C}$ が条件 $A \cap B \in \mathcal{C}\ \forall A \in \mathcal{C}\ \forall B \in \mathcal{C}$ を満たすとする。このとき集合族 $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ で生成される $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族は σ-加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ に等しい。

証明. 集合族 $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ も条件 $A \cap B \in \tilde{\mathcal{C}}\ \forall A \in \tilde{\mathcal{C}}\ \forall B \in \tilde{\mathcal{C}}$ を満たす。従って補題 12.9 により $\tilde{\mathcal{C}}$ で生成される $\mathbb{R}^d$ 上の Dynkin 族 $\mathcal{D}$ は条件

$$A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall A \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$$

を満たすことになる。しかも $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ なので補題 12.5(i) により $\mathcal{D}$ は σ-加法族である。またそれは $\mathcal{C}$ を含む。$\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ で生成される σ-加法族であるから $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ を得る。

他方、σ-加法族は Dynkin 族である。よって $\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ を含む Dynkin 族となる。$\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$ を得る。 □

記号

$\mathrm{proj}_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d(1)}$, $\mathrm{proj}_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d(2)}$ は次で定義される写像を表す。

$$\mathrm{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \ \ \mathrm{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

警告

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ なら $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$, $\mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2$, $A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$ であるが、一般には $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ から $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$ や $A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$ は従わない。

12.11 補題. $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ なら関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y)\, \mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

証明. $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ は σ-有限であるから補題 10.3 により $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 $\mathcal{B}_2$-分割 Δ で

$$\mu_2(J) < +\infty\ \forall J \in \Delta$$

を満たすものが存在する。次の集合族を考察する。

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_J 1_A(x, y)\, \mu_2(dy)\ \mathcal{B}_1\text{-可測}\ \forall J \in \Delta\}.$$

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ としよう。このとき補題 11.2 により

$$1_A(x,y) = 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 A}(y) \, \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)} \, \forall y \in \mathbb{R}^{d(2)} \text{ かつ } \mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2$$

であるから

$$\int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) = 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J 1_{\mathrm{proj}_2 A} \, \mu_2 = 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) \mu_2(J \cap \mathrm{proj}_2 A) \ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}.$$

従って $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$ より各 $J \in \Delta$ に対し $x \mapsto \displaystyle\int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。即ち

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}.$$

次に $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ としよう。このとき $1_B - 1_A = 1_{B \setminus A}$ である。さて

$$0 \le \int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) \le \int_J 1_B(x,y) \, \mu_2(dy) \le \mu_2(J) < +\infty \ \forall J \in \Delta$$

であるから定理 4.9 を適用して

$$\int_J 1_{B \setminus A}(x,y) \, \mu_2(dy) = \int_J 1_B(x,y) \, \mu_2(dy) - \int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) \ \forall J \in \Delta$$

を得る。右辺の各項は $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$ より x に関して $\mathcal{B}_1$-可測である。従って

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

最後に $A_n \in \mathcal{D} \ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ とすると定理 3.18 より

$$\int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) = \int_J \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_{A_n}(x,y) \, \mu_2(dy) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_J 1_{A_n}(x,y) \, \mu_2(dy) \ \forall J \in \Delta$$

が導かれる。各関数 $x \mapsto \displaystyle\int_J 1_{A_n}(x,y) \, \mu_2(dy)$ は $A_n \in \mathcal{D}$ より $\mathcal{B}_1$-可測である。よって補題 5.1 により関数 $x \mapsto \displaystyle\int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy)$ $(A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n)$ の $\mathcal{B}_1$-可測性を得る。従って

$$A_n \in \mathcal{D} \ \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}.$$

以上より $\mathcal{D}$ は $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ をふくむ Dynkin 族である。他方、集合族 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ は定理 12.10 の条件を満たしかつ $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ であるから

$$\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \text{で生成される Dynkin 族}$$

従って $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{D}$ すなわち

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Rightarrow x \mapsto \int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) \ \mathcal{B}_1\text{-可測} \ \forall J \in \Delta.$$

$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ とする。Δ は $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 $\mathcal{B}_2$-分割なので定理 5.5 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) = \sum_{J \in \Delta} \int_J 1_A(x,y) \, \mu_2(dy) \ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。従って $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y) \, \mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。 □

12.12 系. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ なら関数 $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}},\, x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である。

証明. 系 11.13(i) と補題 12.11 から従う。 □

次は *Fubini* **の定理**の骨格をなす部分である。

12.13 定理. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A)\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2.$

証明. 次で定義される関数 $\mu : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ を議論する。

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx).$$

その定義から直ちに $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ かつ $\mu(\emptyset) = 0$ である。Δ を $A \in B_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の可算 $B_1 \otimes \mathcal{B}_2$-分割とする。このとき

$$1_A(x,y) = \sum_{J \in \Delta} 1_J(x,y)$$

である。まず補題 5.4 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy) = \sum_{J \in \Delta} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J(x,y)\,\mu_2(dy)$$

を得る。もう一度補題 5.4 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) = \sum_{J \in \Delta} \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx)$$

が導かれる。即ち μ は σ-加法的である。ゆえに

$$(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu)\ \text{は}\ \mathbb{R}^d\ \text{上の測度である。}$$

次に $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ としよう。このとき補題 11.2 より

$$\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1,\ \mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2,\ 1_A(x,y) = 1_{\mathrm{proj}_1 A}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 A}(y)\,\forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}\ y \in \mathbb{R}^{d(2)}$$

であるから次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) = \mu_1(\mathrm{proj}_1 A)\mu_2(\mathrm{proj}_2 A) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A).$$

$(\mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ は σ-有限であるから系 11.8 により $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ が導かれる。 □

12.14 系. λ を 1 次元 Lebesgue 測度、$\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)\,\lambda(dy) \Big)\,\lambda(dx) = \lambda^{(2)}(A)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

証明. 系 11.13 と定理 12.13 から従う。 □

定理 12.13 の典型的な応用例をあげる。系 11.13(i) により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを確認しておこう。

12.15 例. μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の σ-有限測度で条件 $\mu(\{x\}) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ を満たすものとする。このとき集合 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に属しかつ $(\mu \otimes \mu)(D) = 0$ である。

証明. D^{c} は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるから補題 11.14 により $D^{\mathrm{c}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。D の定義により $1_D(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}} 1_D(x,y)\,\mu(dy) = \mu(\{x\}) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

定理 12.13 を適用して $(\mu \otimes \mu)(D) = 0$ を得る。 □

12.16 補題. $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とするとき次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+cy, y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A)\ \forall c \in \mathbb{R}\,\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

証明. 任意に $c \in \mathbb{R}$ を固定して、写像 $\varphi : (x,y) \mapsto (x+cy, y)$ を導入する。このとき

$$1_A(x+cy, y) = 1_{\varphi^{-1}(A)}(x,y).$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と仮定する。補題 11.18(i) より $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ であるから

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+cy, y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\varphi^{-1}(A)}(x,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A))$$

と議論が展開する。補題 11.18 によれば右辺は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上の測度を定義する。他方、系 12.14 を中辺に適用すると

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+cy, y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_{\varphi^{-1}(A)}(x,y)\,\lambda(dx) \Big)\,\lambda(dy).$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上定義された測度 μ を $\lambda^{(2)}$ と比較するというのがこれからの方針である。このままでは先に進まないので、A に簡単な形を仮定する。1 次元半開区間 I, J に対し

$$1_{\varphi^{-1}(I \times J)}(x,y) = 1_{I \times J}(x+cy, y) = 1_I(x+cy)1_J(y) = 1_{I-cy}(x)1_J(y).$$

よって

$$\mu(I \times J) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_{I-cy}(x)1_J(y)\,\lambda(dx) \Big)\,\lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(I-cy)1_J(y)\,\lambda(dy).$$

定理 10.14 よれば $\lambda(I-cy) = \lambda(I)$ と評価される。従って

$$\mu(I \times J) = \lambda(I)\lambda(J)$$

となり $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上の測度 μ は定理 11.10 の仮定を満たす。よって

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+cy, y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \mu(A) = \lambda^{(2)}(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して成り立つことが導けた。 □

12.17 例. λ を 1 次元 Lebesgue 測度、$\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度、$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする。このとき B が λ 零集合なら $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \in B\}$ は $\lambda^{(2)}$ 零集合である。

証明. B を λ 零集合とする。$c=1,\ A = B \times \mathbb{R}$ として補題 12.16 を適用する。

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{B\times\mathbb{R}}(x+y,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(B\times\mathbb{R}) = \lambda(B)\lambda(\mathbb{R}).$$

このとき $1_{B\times\mathbb{R}}(x+y,y) = 1 \Leftrightarrow x+y \in B$ であり $\lambda(B)=0$ であるから

$$\lambda^{(2)}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \in B\}) = 0.$$

したがって $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \in B\}$ は $\lambda^{(2)}$ 零集合である。 □

定理 11.22 によれば 2 次元 Lebesgue 測度は回転不変である。もう少し一般に **2 次元** *Lebesgue* **測度を保存する線形写像**について調べよう。以下の定理 12.18 に述べるように行列式が 1 または -1 であるような正則線形写像に関して 2 次元 Lebesgue 測度は不変である。

記号

2 次元正則線形写像の全体を $GL(2,\mathbb{R})$ と表す。

12.18 定理. $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とするとき次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A)/|\det\varphi|\ \forall\varphi \in GL(2,\mathbb{R})\,\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

証明. 基本変形を使うと 2 次正則行列は次の 3 タイプの行列の積で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ただし } c \neq 0$$

従って写像 φ が上の何れかの表現行列を持つ場合に命題を示せば十分である。さてそれぞれの行列式は $1,\ c,\ -1$ であるから証明すべきは

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+cy,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A), \\
\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A)/|c|, \\
\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(y,x)\,\lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A).
\end{aligned}$$

第 1 番目はまさに補題 12.16 である。ほかも証明の方針は同じであるが Fubini の定理は直接には使わない。第 2 番目について検討しよう。A に簡単な形を仮定する。1 次元半開区間 $(a,b]$ と J に対し

$$1_{(a,b]\times J}(cx,y) = 1_{(a,b]}(cx)1_J(y) = \begin{cases} 1_{(a/c,b/c]}(x)1_J(y) & c>0 \\ 1_{[b/c,a/c)}(x)1_J(y) & c<0 \end{cases}.$$

$c>0$ なら $\lambda((a/c,b/c])=(b-a)/c$ であり $c<0$ なら $\lambda([b/c,a/c))=(b-a)/|c|$ である。いずれにしても次が成り立つ。

$$|c|\int_{\mathbb{R}^2} 1_{(a,b]\times J}(cx,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\lambda((a,b])\lambda(J).$$

定理 11.10 を測度 $A\mapsto |c|\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy)$ に適用して

$$|c|\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx,y)\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\lambda^{(2)}(A)\,\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

第 3 番目については演習問題とする。 □

12.19 演習問題. 定理 12.18 の証明を完結させよ。とくに 3 タイプの表現行列を持つ場合に帰着できる理由を重点的に考察せよ。

13 Fubini の定理とその応用

Fubini の定理は単なる累次積分の順序交換を述べる命題ではない。ここでは almost everywhere の概念との関わりを中心に考察を進めていく。

前提

$(\mathcal{B}_1,\mu_1)$ を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ-有限な測度、$(\mathcal{B}_2,\mu_2)$ を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ-有限な測度とする。また $d=d(1)+d(2)$ とする。特別な場合として λ を 1 次元 Lebesgue 測度、$\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ は直積 σ-加法族を表す。このとき直積測度 $\mu_1\otimes\mu_2$ は次の条件を満たす $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2)$ 上の一意的な測度である。

$$(\mu_1\otimes\mu_2)(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)\ \forall A\in\mathcal{B}_1\forall B\in\mathcal{B}_2.$$

警告

上では 0 と ∞ の積は 0 と約束しているが図に乗って $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}n^2=0\infty=0$ とか $\infty-\infty=(1-1)\infty=0\infty=0$ としてはいけない。極限操作や分配法則の運用は慎重になる必要がある。

13.1 補題. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測とする。
(i) 各 $x\in\mathbb{R}^{d(1)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(2)}\to\overline{\mathbb{R}},\ y\mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。
(ii) 各 $y\in\mathbb{R}^{d(2)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}},\ x\mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

証明. (i) 各 $x\in\mathbb{R}^{d(1)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(2)}\to\overline{\mathbb{R}},\ y\mapsto\max\{f(x,y),0\}$ が $\mathcal{B}_2$-可測であることを示そう。$a\in\mathbb{R}$ を任意に固定する。$\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ 可測性により

$$A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d:f(x,y)<a\}\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2.$$

ここで $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ を固定する。補題 12.1(i) により $x \mapsto 1_A(x,y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測であるから

$$\{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : f(x,y) < a\} = \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : 1_A(x,y) \geq 1\} \in \mathcal{B}_2.$$

よって $y \mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。(ii) を示すには x, y の役割を入れ替えればよい。 □

13.2 系. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-可測とする。
(i) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $y \mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である。
(ii) 各 $y \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto f(x,y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である。

証明. 系 11.13 と補題 13.1 から従う。 □

非負値可測関数については *Fubini* **の定理**、*Tonelli* **の定理**あるいは *Fubini-Tonelli* **の定理**と呼ぶべきかもしれない、は非常に明解である。

13.3 定理. 関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ は非負値かつ $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測とする。
(i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \mu_1 \otimes \mu_2.$

証明. まず、f が非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 単関数である場合を検討する。このとき

$$f = \sum_{z \in \mathrm{Image} f} z 1_{f^{-1}\{z\}}$$

と書け、右辺は有限和である。定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy) = \sum_{z \in \mathrm{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(x,y)\,\mu_2(dy).$$

補題 12.11 によれば、右辺は $\mathcal{B}_1$-可測関数の有限和を定義する。従って補題 4.1 より関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$$

の $\mathcal{B}_1$-可測性を得る。定理 4.4 と補題 12.13 を適用して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) &= \sum_{z \in \mathrm{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(x,y)\,\mu_2(dy) \Big)\,\mu_1(dx) \\ &= \sum_{z \in \mathrm{Image} f} z\ \mu_1 \otimes \mu_2(f^{-1}\{z\}) = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \mu_1 \otimes \mu_2.\end{aligned}$$

これで単関数の場合の証明が完成した。一般の場合の議論に移る。補題 3.17 によれば

$$f_n \leq f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x,y) = f(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^d.$$

を満たす非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 単関数の列 f_n が存在する。単関数についての考察から

$$\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x,y)\,\mu_2(dy)$$

は $\mathcal{B}_1$-可測である。よって定理 3.18 と補題 5.1 を適用して関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x,y)\,\mu_2(dy) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$$

の $\mathcal{B}_1$ 可測性を得る。μ_1 についての積分に定理 3.18 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).$$

単関数についての考察から右辺の累次積分は $\int_{\mathbb{R}^d} f_n\ \mu_1\otimes\mu_2$ に等しい。従って

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n\ \mu_1\otimes\mu_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \mu_1\otimes\mu_2.$$

もちろん 2 番目の等号は定理 3.18 から導かれる。 □

13.4 系. 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ は非負値かつ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測とする。
(i) 関数 $\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}},\ x\mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dy)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f\ \lambda^{(2)}.$

証明. 系 11.13 と定理 13.3 から従う。 □

13.5 定理. 関数 $f:\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_1$-可測、関数 $g:\mathbb{R}^{d(2)}\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_2$-可測とする。
(i) 関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto f(x)g(y)$ は $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測である。
(ii) $f,\ g$ ともに非負値であるなら

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y)\ \mu_1\otimes\mu_2(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f\,\mu_1 \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g\,\mu_2$$

証明. (i) まず関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto f(x)$ が $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測であることを確かめる。関数 f の $\mathcal{B}_1$-可測性により $\{x\in\mathbb{R}^{d(1)} : f(x)<a\}\in\mathcal{B}_1\ \forall a\in\mathbb{R}$ である。よって $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ の定義により

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^d : f(x)<a\} = \{x\in\mathbb{R}^{d(1)} : f(x)<a\}\times\mathbb{R}^{d(2)} \in \mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

同様にして関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto g(y)$ の $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測性もわかる。従って補題 4.13 を適用して $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ が $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測であることが導かれる。
(ii) (i) と定理 13.3 から従う。 □

13.6 系. 関数 $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}},\ g:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ はともに $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測とする。
(i) 関数 $\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto f(x)g(y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。
(ii) $f,\ g$ ともに非負値であるなら

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\ \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} f\,\lambda \int_{\mathbb{R}} g\,\lambda.$$

証明. 系 11.13 と定理 13.5 から従う。 □

定理 13.3 の証明に用いた論法、すなわち単関数について証明できればあとは単調収束定理によってすべてを処理するという手順、は非常に有効なものであり、**スタンダードマシン**(standard machine) と呼ぶ研究者もいる。例として線形写像に対する**変数変換公式**(change of variable formula) を証明しておく。特に行列式が 1 または -1 であるなら *Lebesgue* **積分は保存される**。

記号

2 次元正則線形写像の全体を $GL(2,\mathbb{R})$ と表す。

13.7 定理. 非負値かつ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測な関数 $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\frac{1}{|\det\varphi|}\int_{\mathbb{R}^2} f\,\lambda^{(2)}\ \forall\varphi\in GL(2,\mathbb{R}).$$

証明. まず、f が非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 単関数である場合を検討する。このとき

$$f=\sum_{z\in\mathrm{Image}f} z1_{f^{-1}\{z\}},\quad f\circ\varphi=\sum_{z\in\mathrm{Image}f} z1_{f^{-1}\{z\}}\circ\varphi$$

と書け、右辺は有限和である。定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\sum_{z\in\mathrm{Image}f} z\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy).$$

右辺に定理 12.18 を適用して

$$\sum_{z\in\mathrm{Image}f} z\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\sum_{z\in\mathrm{Image}f} z\lambda^{(2)}(f^{-1}\{z\})/|\det\varphi|.$$

よって次が導出でき単関数の場合の証明が完成した。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\frac{1}{|\det\varphi|}\int_{\mathbb{R}^2} f\,\lambda^{(2)}.$$

一般に $f\circ\varphi$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測であることを補題 11.18 によって確認する。補題 3.17 によれば

$$f_n\le f_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N},\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x,y)=f(x,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

を満たす非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 単関数の列 f_n が存在する。単関数についての考察から

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(\varphi(x,y))\,\lambda^{(2)}(dxdy)=\frac{1}{|\det\varphi|}\int_{\mathbb{R}^2} f_n\,\lambda^{(2)}.$$

両辺に定理 3.18 を適用して結論が導かれる。 □

非負値（あるいは非正値）ではない可測関数については Fubini の定理はかなり難解で勘違いをしやすい面がある。状況を具体例で見よう。

13.8 例. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の計算は定理 9.13 の応用でありすべて演習問題とする。

$$\begin{aligned} \int_{[-1,2]} \max\{f(x,y),0\}\,\lambda(dy) &= \begin{cases} \dfrac{2}{x(x^2+4)} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{-1}{2x(x^2+1)} & x<0 \end{cases} \\ \int_{[-1,2]} \max\{-f(x,y),0\}\,\lambda(dy) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2x(x^2+1)} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{-2}{x(x^2+4)} & x<0 \end{cases} \end{aligned} \tag{13.9}$$

が成り立つ。 ここで $f(x,y) = \max\{f(x,y),0\} - \max\{-f(x,y),0\}$ なので、各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $y \mapsto f(x,y)$ は $[-1,2]$ 上で λ-可積分であり

$$\begin{aligned} \int_{[-1,2]} f(x,y)\,\lambda(dy) &= \frac{3x}{2(x^2+1)(x^2+4)} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \\ \int_{[0,1]} \Big(\int_{[-1,2]} f(x,y)\,\lambda(dy) \Big)\,\lambda(dx) &= \frac{1}{4}\log\frac{8}{5}. \end{aligned} \tag{13.10}$$

ところが $\dfrac{1}{2|x|(x^2+1)} \geq \dfrac{1}{4|x|}\ \forall x \in [0,1]$, $\dfrac{2}{|x|(x^2+4)} \geq \dfrac{2}{5|x|}\ \forall x \in [0,1]$ なので

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \Big(\int_{[-1,2]} \max\{f(x,y),0\}\,\lambda(dy) \Big)\,\lambda(dx) &= +\infty \\ \int_{[0,1]} \Big(\int_{[-1,2]} \max\{-f(x,y),0\}\,\lambda(dy) \Big)\,\lambda(dx) &= +\infty \end{aligned}$$

である。従って差し引きして累次積分を求めることはできない。また 関数

$$y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,\lambda(dx)$$

は $[-1,2]$ 上で λ-可積分でないから累次積分の順序交換も許されない。

13.11 演習問題. (13.9), (13.10) を示せ。

そこで積分が絶対収束していることを要求して解決を図る。次の補題およびその系は定理 13.3 のきわだって重要な応用例であり、非負値とは限らない関数に Fubini の定理を適用する場合にその前提条件となる可積分性を確かめるのに非常に有用である。例 13.22 および例 13.24 においてその真価が分かるであろう。

13.12 補題. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測とする。$f$ が $\mu_1\otimes\mu_2$-可積分であるための必要十分条件は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)<+\infty$ である。

証明. 定理 13.3(ii) から直ちに従う。 □

13.13 系. 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測とする。f が $\lambda^{(2)}$-可積分であるための必要十分条件は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx)<+\infty$ である。

証明. 系 11.13 と補題 13.12 から従う。 □

13.14 補題. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2,\mu_1\otimes\mu_2)$-可積分とする。
(i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ と $x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ はともに $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分であって次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f\ \mu_1\otimes\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^{d(1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^{d(1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).\end{aligned}$$

(ii) $\{x\in\mathbb{R}^{d(1)}:\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)<+\infty\}\in\mathcal{B}_1$ は μ_1-a.e. 集合である。

証明. (i) 非負値な $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測関数 $\max\{f,0\}:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ に定理 13.3 を適用して関数

$$(\star)\qquad \mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}},x\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$$

の $\mathcal{B}_1$-可測性と次の等式を得る。f は $\mu_1\otimes\mu_2$-可積分なので右辺の積分は有限である。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}\max\{f,0\}\ \mu_1\otimes\mu_2<+\infty.$$

従って関数 $(\star)$ は μ_1-可積分となる。関数 $-f$ について議論することにより関数 $\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ の $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分性と等式

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}\max\{-f,0\}\ \mu_1\otimes\mu_2<+\infty$$

が導かれる。得られた等式を差し引きして (i) に関する考察を終わる。

(ii) 補題 13.12 を適用して $x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)$ の $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分性を得る。従って系 3.6 により結論が導かれる。 □

ここで $\infty-\infty$ を回避するために行った和に関する取り決めを思い出そう。

再確認

関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して条件 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} = \emptyset$, $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} = \emptyset$ が成立するときに限って和 $f+g$ を考える。

累次積分を行う際に次の事態が起こりうる。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) = +\infty, \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) = +\infty.$$

補題 13.14(ii) がその処理策を与える。それによると上のいずれかであるような $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ 全体は μ_1-零集合をなす。従って μ_1-a.e. 集合上では $\infty - \infty$ は回避されるわけである。

記号

$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測関数 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy) & \text{if} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy) & \text{if} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

13.15 補題. $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測関数とする。

(i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

(ii) $\underline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy) = -\overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} - f(x,y)\,\mu_2(dy)\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

(iii) $\left|\overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)\right| \le \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)|\,\mu_2(dy)\ \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

証明. $a \in \mathbb{R}$ とする。定理 13.3(i) により次の集合はいずれも $\mathcal{B}_1$ に属する。

$$\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty\}$$
$$\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) < \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) + a\}$$

それらの共通部がまさに

$$\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy) < a\}$$

であるからやはり $\mathcal{B}_1$ に属する。よって (i) が導けた。(ii) は定義から直ちに従う。(iii) を示すには定理 4.6(ii) を適用すればよい。 □

ついに *Fubini* **の定理**にたどり着いた。μ_1-a.e. という概念を避けてこの定理を語ることはできない。まさにそこが最大の見どころである。

13.16 定理. 関数 $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2,\mu_1\otimes\mu_2)$-可積分とする。

(i) $\underline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)=\overline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ μ_1-a.e. $x\in\mathbb{R}^{d(1)}$.

(ii) $\mathcal{B}_1$-可測関数 $g:\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}}$ が $g(x)=\overline{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ μ_1-a.e. $x\in\mathbb{R}^{d(1)}$ を満たせば、それは μ_1-可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\ \mu_1\otimes\mu_2=\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} g\,\mu_1.$$

証明. (i) 補題 13.14(ii) により次の集合は $\mathcal{B}_1$ に属しかつ μ_1-a.e. 集合である。

$$A:=\{x\in\mathbb{R}^{d(1)}:\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)<+\infty\}.$$

二つの関数は A 上で等しいので (i) が成り立つ。

(ii) 仮定と補題 13.15(iii) により次が成り立つ。

$$|g(x)|\le\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)\ \ \mu_1\text{-a.e. }\ x\in\mathbb{R}^{d(1)}.$$

従って定理 6.8(i) と定理 13.3(iii) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}}|g|\,\mu_1\le\int_{\mathbb{R}^d}|f|\ \mu_1\otimes\mu_2<+\infty$$

を得る。すなわち g は μ_1-可積分である。次の集合も $\mathcal{B}_1$ に属しかつ μ_1-a.e. 集合である。

$$B:=\{x\in\mathbb{R}^{d(1)}:g(x)=\overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}} f(x,y)\,\mu_2(dy)\}.$$

系 6.19 によれば、$A\cap B$ も μ_1-a.e. 集合である。さらに次が成り立つ。

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)-\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\ \forall x\in A\cap B.$$

各項は μ_1-可積分なので定理 4.9 により

$$\begin{aligned}\int_{A\cap B} g\,\mu_1=&\int_{A\cap B}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)\\&-\int_{A\cap B}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).\end{aligned}$$

を得る。ここで $A\cap B$ は $\mathbb{R}^{d(1)}$ の μ_1-a.e. 集合なので系 4.16(ii) により $A\cap B$ 上での積分は $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上でのものに等しい。最後に補題 13.14(i) と組み合わせて結論を得る。 □

13.17 系. 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda^{(2)})$ 可積分とする。

(i) $\underline{\int_{\mathbb{R}}} f(x,y)\,\lambda(dy)=\overline{\int_{\mathbb{R}}} f(x,y)\,\lambda(dy)$ λ-a.e. $x\in\mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測関数 $g:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ が $g(x)=\overline{\int_{\mathbb{R}}} f(x,y)\,\lambda(dy)$ λ-a.e. $x\in\mathbb{R}$ を満たせば、それは λ-可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\ \lambda^{(2)}=\int_{\mathbb{R}} g\,\lambda.$$

証明. 系 11.13 と定理 13.16 から従う。 □

13.18 演習問題. $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ 可測関数 $f:\mathbb{R}^{d(1)}\times\mathbb{R}^{d(2)}\to\overline{\mathbb{R}}$ が $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)<+\infty$ $\forall x\in\mathbb{R}^{d(1)}$ を満たすなら $\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}},\ x\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$ 可測であることを示せ。

13.19 注意. 具体的な計算例では $\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,\lambda(dy)<+\infty$ $\forall x\in\mathbb{R}$ がしばしば成り立つ。そのようなときは、演習問題 13.18 の結論により、系 13.17 における補助的な関数 g として関数 $x\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dy)$ を選ぶことができる。このような事情があるので、Fubini の定理を次のようにあっさりと表現していることもある。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\ \lambda^{(2)}=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx).$$

しかしこれは a.e. 集合の役割を見えなくする危険性をはらんでいる。

次の定理は確率論における独立性の取り扱いに関して決定的な役割を果たす。

13.20 定理. 関数 $f:\mathbb{R}^{d(1)}\to\overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分、関数 $g:\mathbb{R}^{d(2)}\to\overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_2,\mu_2)$-可積分とする。このとき関数 $\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto f(x)g(y)$ は $(\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2,\mu_1\otimes\mu_2)$-可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y)\ \mu_1\otimes\mu_2(dxdy)=\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f\,\mu_1\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g\,\mu_2.$$

証明. 定理 13.5 と定理 13.16 から従う。 □

13.21 系. 関数 $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}},\ g:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ はともに $(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$-可積分とする。このとき関数 $\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}},\ (x,y)\mapsto f(x)g(y)$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda^{(2)})$-可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\ \lambda^{(2)}(dxdy)=\int_{\mathbb{R}} f\,\lambda\int_{\mathbb{R}} g\,\lambda.$$

証明. 系 11.13 と定理 13.20 から従う。 □

Fubini の定理を応用した計算例を挙げる。

13.22 例. $t>0$ に対して $\displaystyle\int_{(0,+\infty)}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,\lambda(dx)=\int_{(t,+\infty)}\frac{1}{y^2+1}\,\lambda(dy).$

証明. λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。定理 3.18 と定理 9.13(ii) により

$$\int_{(t,+\infty)} e^{-xy}\,\lambda(dy) = \sup_{n\in\mathbb{N}:n>t}\int_{(t,n]} e^{-xy}\,\lambda(dy) = \sup_{n\in\mathbb{N}:n>t}\frac{e^{-tx}-e^{-nx}}{x} = \frac{e^{-tx}}{x}\ \forall x>0.$$

上の結果から、変数の役割を取り替えるなどして、関数 $x\mapsto e^{-tx}$ が $(0,+\infty)$ 上で λ 可積分であることも読みとれる。さて $|\sin x|\le x\ \forall x>0$ より

$$\begin{aligned}&\int_{(0,+\infty)}\Big(\int_{(t,+\infty)} e^{-xy}|\sin x|\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx)\\ &\qquad = \int_{(0,+\infty)}\frac{e^{-tx}}{x}|\sin x|\,\lambda(dx) \le \int_{(0,+\infty)} e^{-tx}\,\lambda(dx) < +\infty.\end{aligned}$$

系 13.13 により関数 $(x,y)\mapsto 1_{(0,+\infty)\times(t,+\infty)}(x,y)e^{-xy}\sin x$ に系 13.17 が適用できる。

$$\int_{(0,+\infty)}\frac{e^{-tx}}{x}\sin x\,\lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)\times(t,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\lambda^{(2)}(dx,dy).$$

次に x, y の役割を入れ替えて系 13.17 を適用する。

$$\int_{(0,+\infty)\times(t,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\lambda^{(2)}(dx,dy) = \int_{(t,+\infty)}\Big(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\lambda(dx)\Big)\,\lambda(dy).$$

残っているのは右辺の評価であるが、これは演習問題 13.23 にゆだねる。 □

13.23 演習問題. $y>0$ に対して $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\lambda(dx) = \frac{1}{y^2+1}$ を示せ。

同様にして次の広義積分を評価することができる。

13.24 例. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{(0,R]}\frac{\sin x}{x}\,\lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)}\frac{1}{y^2+1}\,\lambda(dy).$

証明. $R>0$ とする。今度は関数 $(x,y)\mapsto 1_{(0,R]\times(0,+\infty)}(x,y)e^{-xy}\sin x$ に Fubini の定理を適用する。そのためには、以下の検証が不可欠である。

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-xy}\,\lambda(dy) = \frac{1}{x}\ \forall x>0.$$

$$\int_{(0,R]}\Big(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy}|\sin x|\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx) = \int_{(0,R]}\frac{1}{x}|\sin x|\,\lambda(dx) < +\infty.$$

従って系 13.13 により $(x,y)\mapsto 1_{(0,R]\times(0,+\infty)}(x,y)e^{-xy}\sin x$ に系 13.17 が適用できる。

$$\begin{aligned}\int_{(0,R]}\frac{1}{x}\sin x\,\lambda(dx) &= \int_{(0,R]}\Big(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\lambda(dy)\Big)\,\lambda(dx)\\ &= \int_{(0,+\infty)}\Big(\int_{(0,R]} e^{-xy}\sin x\,\lambda(dx)\Big)\,\lambda(dy).\end{aligned}$$

さて微分すればすぐわかるように、$x \mapsto e^{-xy} \sin x$ の原始関数の一つは

$$x \mapsto -e^{-xy} \frac{y \sin x + \cos x}{y^2 + 1}$$

である。よって定理 9.13(ii) により

$$\int_{(0,R]} e^{-xy} \sin x \, \lambda(dx) = \frac{1}{y^2+1} - e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2+1} \, \forall y > 0.$$

変数 y の関数として右辺の各項はいずれも λ 可積分であるから、以上をまとめて

$$\int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \, \lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \, \lambda(dy) - \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2+1} \, \lambda(dy).$$

右辺第 2 項を処理するために、以下の評価を使う。

$$|y \sin R + \cos R| \leq y + 1 \leq \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}(y^2+1) \, \forall y > 0.$$

よって

$$\Big| \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2+1} \, \lambda(dy) \Big| \leq \frac{3}{2} \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \lambda(dy) = \frac{3}{2R}.$$

これは $R \to +\infty$ のとき 0 に収束する。 □

13.25 注意. 絶対収束しない広義積分には Legesgue の収束定理は適用できないので、以下のような変形は直接的には許されない。

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0,+\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, \lambda(dx) = \lim_{R \to +\infty} \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \, \lambda(dx).$$

しかしながら各 $R > 0$ に対して区間 $(0, R)$ 上の関数 $x \mapsto |\sin x|/x$ は λ-可積分である。従ってこれを優関数として定理 5.7 が適用できるので

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, \lambda(dx) = \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \, \lambda(dx)$$

と変形するのは許される。また例 13.22 と定理 3.18 から

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0,+\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, \lambda(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{(t,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \, \lambda(dy) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \, \lambda(dy).$$

積分の区間に対する加法性を考慮して組み合わせると

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \, \lambda(dy) - \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) \Big| \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \Big| \int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) - \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \Big| = \lim_{t \downarrow 0} \Big| \int_{(R,\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \Big|. \end{aligned}$$

部分積分を用いて右辺を評価する。

$$\int_{(R,+\infty)} \sin x \frac{e^{-tx}}{x} \lambda(dx) = (\cos R - 1)\frac{e^{-tR}}{R} + \int_{(R,+\infty)} (1-\cos x)\Big(\frac{e^{-tx}}{x^2} + \frac{te^{-tx}}{x}\Big)\lambda(dx)\ \forall R>0\,\forall t>0.$$

さて $0 \leq 1-\cos x \leq 2\ \forall x \in \mathbb{R}$ を使うと右辺の積分の値は非負でありかつ

$$\int_{(R,+\infty)} \Big(\frac{2e^{-tx}}{x^2} + \frac{2te^{-tx}}{x}\Big)\lambda(dx) = \frac{2e^{-tR}}{R}$$

で抑えられる。従って次が成り立つ。

$$-\frac{2}{R} \leq \frac{\cos R - 1}{R} e^{-tR} \leq \int_{(R,+\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \leq \frac{\cos R + 1}{R} e^{-tR} \leq \frac{2}{R}\ \forall R>0, \forall t>0.$$

以上をまとめて

$$\Big| \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2+1}\,\lambda(dy) - \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x}\lambda(dx)\Big| \leq \frac{2}{R}\,\forall R>0.$$

これは例 13.24 の別証明になっている。

13.26 演習問題. $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, 関数 $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ はともに $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$-可積分とする。関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ および集合 A を次で定義せよ。

$$F(x) := \int_{(-\infty,x]} f\,\lambda,\ G(x) := \int_{(-\infty,x]} g\,\lambda,\ A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a<x<y<b\}.$$

(i) 関数 F, G は有界かつ連続であることを示せ。

(ii) $\displaystyle\int_A f(x)g(y)\,\lambda^{(2)}(dx,dy) = \int_{(a,b)} f(G(b)-G)\,\lambda$ を示せ。

(iii) $\displaystyle\int_{(a,b)} Fg\,\lambda = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b)} fG\,\lambda$ を示せ。これを**部分積分公式**(integration by parts formula) という。

索 引