

測度と積分

広島大学理学部数学科解析学 A 講義ノート

岩田耕一郎

2006 年 7 月 28 日

目次

1	概略—定義域の分割から値域の分割への転換	2
2	単関数の積分	6
3	非負値可測関数の積分	11
4	可積分関数とその積分	16
5	Lebesgue の収束定理	22
6	測度 0 の集合	26
7	有限加法的測度とそれが誘導する外測度	32
8	Carathéodory の外測度と可測集合	37
9	1 次元 Lebesgue 測度の存在	42
10	1 次元 Lebesgue 積分	50
11	拡張の一貫性とその応用	62
12	直積測度としての 2 次元 Lebesgue 測度	65
13	Dynkin 族定理と直積測度の構造	72
14	Fubini-Tonelli の定理と単調収束定理	82
15	Fubini の定理とその応用	89
16	部分積分とそれが開く世界	97

1 概略—定義域の分割から値域の分割への転換

積分とは、大ざっぱに言うと関数の値を長さ、面積、体積などにより重みを付けて連続的に足しあわせる事である。今、“連続的に”という言葉を用意に使ったが、ここがくせ者である。Riemann 積分においては、関数の定義域を部分区間などへ分割し Riemann 和を定義し、分割を細かくする極限移行を経由して、連続的な足しあわせを実行していたのである。これでそれなりの世界ができあがるわけで、happy!と言いたいところだが現実は甘くない。例えば次の定理を Riemann 積分の世界にとどまって見通しよく証明するのは難しい。

f_n を区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列で次を満たすものとする。

$$\exists M < +\infty \text{ s.t. } |f_n(x)| \leq M \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$$

このとき数列 $\int_0^1 f_n(x) dx$ は 0 に収束する。

記号

\mathbb{Z} 整数全体、 \mathbb{N} 正の整数全体、 \mathbb{R} 実数全体、 \mathbb{Q} 有理数全体

状況を打開するには、視点を転換する必要があった。与えられた関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に応じて分割をとるのである。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して次のような集合全体を考える。

$$(1.1) \quad \{x \in \mathbb{R}^d : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

等分割されているのは、定義域でなくて値域の方である。上にでてきた集合たちは番号 k が異なれば共通部分を持たない。さて長さ、面積、体積などには加法性という共通点がある。即ち、ある領域を共通部分を持たない部分に分けたとき、全体の面積は各部分の面積の和になる等である。この性質を抽象化して測度という概念が生じる。

しかしながら、これは一方で数学における闇の世界を露呈させたのである。例えば \mathbb{R}^2 のすべての部分集合の面積をはかることができるなら話は簡単なのだが、そうではないので面積をはかることができる集合達を規定する必要がでてくる。ところがその規定というのがなかなか正体をつかみにくい代物だから厄介なのである。

1.2 定義. \mathcal{B} を \mathbb{R}^d の部分集合の族とする (全体集合を一つ規定しておくことが必要)。それが次の条件を満たすとき、 \mathcal{B} は σ -加法族 (σ -field) をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(ii) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$ (A^c は全体集合 \mathbb{R}^d に関する A の補集合を表す。)

(iii) $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

(iii) において合併 (union) の対象となるのは 可算無限個 (countably infinite) の集合達であることを注意してほしい。以後、“ \mathcal{B} は \mathbb{R}^d 上の σ -加法族である” という表現を使う。

既にふれたように面積など内容豊富なもの扱うには量を測る対象としての B はある程度絞り込む必要がある。そこで開集合や閉集合など重要なものだけを取り込むというスタンスになることを後に第 11 節などで解説する。

記号

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

1.3 定義. \mathbb{R}^d の部分集合の族 B と関数 $\mu : B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について次の条件が成り立つとき、 (B, μ) (定義域 B を省略することも多い) は \mathbb{R}^d 上の測度(measure) であるという。

- (i) B は \mathbb{R}^d 上の σ -加法族をなす
- (ii) $\mu(A) \geq 0 \forall A \in B$ ($+\infty$ も許す) かつ $\mu(\emptyset) = 0$
- (iii) $A_n \in B \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset \ n \neq m \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) においては $+\infty$ に発散する場合も許す。性質 (iii) を σ -加法性(σ -additivity) という。

今の段階では次のことを記憶にとどめて貰いたい。

予告

\mathbb{R}^2 上で B としては Jordan の意味で面積確定な集合をすべて含むものが設定できてかつ A を長方形とすると $\mu(A) = \text{縦} \times \text{横}$ となる測度 μ が一意的に存在する。これが 2 次元ルベーグ測度 (Lebesgue measure) と呼ばれるものである。

前提

以下、 (B, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

被積分関数となるのは (1.1) で提示した各集合が σ -加法族 B に属するものたちである。

1.4 定義. 次の条件を満たす関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は B -可測(measurable) であるという。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} \in B \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

このとき f を B -可測関数(measurable function) と呼ぶ。一方 σ -加法族 B に属する集合は B -可測集合(measurable set) と呼ばれる。

1.5 定義. 次の条件を満たす関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を B -単関数(simple function) と呼ぶ。

B -可測、 $-\infty, +\infty$ という値はとらない、像 $f(\mathbb{R}^d) = \{f(x) ; x \in \mathbb{R}^d\}$ は有限集合

記号

$$\text{関数 } f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ に対し } \text{Image } f := f(\mathbb{R}^d), f^{-1}\{y\} := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = y\}$$

集合 $f^{-1}\{y\}$ は y の f による逆像 (inverse image あるいは preimage) と呼ばれる。論理的には、先に進む前に次を確かめておく必要がある。

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ } \mathcal{B}\text{-可測} \Rightarrow f^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \forall y \in \mathbb{R}$$

これは量 $\mu(f^{-1}\{y\})$ が定義可能であることにつながるのだが先を急ごう。

記号

関数 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対し条件 $g(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$ を $g \leq f$ と表記する。

1.6 定義. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 ($+\infty$ の値をとることも許す) かつ \mathcal{B} -可測なものとする。つぎで定義される量 ($+\infty$ も許す) を f の μ についての積分(integral) と言う。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu := \sup \left\{ \sum_{y \in \text{Image } g} y \mu(g^{-1}\{y\}) ; g \text{ 非負値 } \mathcal{B}\text{-単関数}, g \leq f \right\}$$

$g \leq f$ なる非負値 \mathcal{B} -単関数 g にたいして

$$\sum_{y \in \text{Image } g} y \mu(g^{-1}\{y\})$$

は Riemann 積分で言うところの不足和に対応するものである。またそのような g についての上限は、下積分に対応しているのであるが、 f の \mathcal{B} -可測性と μ の σ -加法性によりこれが自動的に積分の定義となってしまうところが測度論的な積分の長所である。先に進む前に次の演習問題を解いておこう。

1.7 演習問題. 単関数の数列版を単純数列と呼ぼう。すなわち b_n が単純数列であるとは

b_n は $-\infty, +\infty$ の値はとらない。像 $\{b_n ; n \in \mathbb{N}\}$ は有限集合。

a_n を非負値の数列とする。次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n ; b_n \text{ 非負値の単純数列}, b_n \leq a_n \forall n \right\}$$

数列の話がでたついでに正項級数および級数の絶対収束性について復習をしておこう。

- 正項級数に対して $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_n \sum_{k=1}^n a_k$ ($+\infty$ も許す) である。
- 絶対収束級数は収束する。
- 収束する優級数が存在するなら絶対収束する。

測度論的な積分は絶対収束の世界における産物である。関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$f(x) = \max\{f(x), 0\} - \max\{-f(x), 0\}, |f(x)| = \max\{f(x), 0\} + \max\{-f(x), 0\} \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

であることを思い出そう。次を確かめておく必要があるけれどもここは先を急ごう。

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ が } \mathcal{B}\text{-可測} \Rightarrow \max\{f, 0\}, \max\{-f, 0\}, |f| \text{ は非負値 } \mathcal{B}\text{-可測}$$

1.8 定義. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測なものとする。それが次の条件を満たすとき、 f は μ -可積分(integrable) であるという。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu < +\infty, \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu < +\infty.$$

μ -可積分であるときつぎで定義される量を f の μ についての積分と言う。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu := \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu.$$

実は次が成り立つので次の節以降はこれが可積分性の定義となる。

\mathcal{B} -可測関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が μ -可積分であるための必要十分条件は

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu < +\infty.$$

(\mathcal{B}, μ) を 2次元ルベーク測度、 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とすると

- f は \mathcal{B} -可測
- f の広義積分が絶対収束する $\Leftrightarrow f$ が μ -可積分
- μ -可積分なとき、広義積分と $\int_{\mathbb{R}^2} f \mu$ は一致

が成り立ち、これまで慣れ親しんできたものと結びつく。

測度論的な積分の真価のひとつはルベークの収束定理と呼ばれるものである。

f を \mathbb{R}^d 上の μ -可積分関数、 f_n を \mathbb{R}^d 上の μ -可積分関数列で次を満たすものとする。

$$\exists g \mu\text{-可積分 s.t. } |f_n(x)| \leq g(x) \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^d, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$$

このとき数列 $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ は $\int_{\mathbb{R}^d} f \mu$ に収束する。

1.9 例. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を有界連続関数とする。このとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ の極限で } \pi f(0) \text{ に収束する。}$$

証明. 変数変換により与えられた積分は次に等しい。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x/n)}{x^2 + 1} dx$$

関数 f は連続なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x/n)/(x^2 + 1) = f(0)/(x^2 + 1) \forall x \in \mathbb{R}.$$

関数 f は有界なので、 $\exists M < +\infty$ s.t. $|f(y)| \leq M \forall y \in \mathbb{R}$. $g(x) := M/(x^2 + 1)$ とおくと

$$\text{関数 } g \text{ は可積分かつ } |f(x/n)/(x^2 + 1)| \leq g(x) \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}.$$

従ってルベークの収束定理が適用できる。極限值は $\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)/(x^2 + 1) dx = \pi f(0)$ である。 \square

級数の場合に関して演習問題を解いておこう。

1.10 演習問題. a_{mn} を数列で次を満たすものとする。

$$\exists b_m \text{ s.t. } |a_{mn}| \leq b_m \forall m \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{m=1}^{\infty} b_m < +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0 \forall m \in \mathbb{N}$$

このとき $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ は $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束することを示せ。

2 単関数の積分

この節では単関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく。

前提

(\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

関数の可測性については定義 1.4 で規定したとおりだが、状況に応じて使いやすい形が違うのでいろいろ言い換えてみよう。

2.1 補題. 関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ について以下の 4 条件は同値である。

- (i) f は \mathcal{B} -可測である。
- (ii) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B} \forall a \in \mathbb{R}$
- (iii) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B} \forall a \in \mathbb{R}$
- (iv) $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\} \in \mathcal{B} \forall a \in \mathbb{R}$

証明. (i) と (ii) の同値性は以下の関係と定義 1.2(ii) から分かる。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} \text{ と } \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq a\} \text{ は互いに他方の補集合}$$

条件 (i) が成り立つなら前者は \mathcal{B} に属し、条件 (ii) が成り立つなら後者は \mathcal{B} に属するからである。(iii) と (iv) の同値性についても同様に議論できる。次に条件 (ii) が成り立つと仮定して、条件 (iv) が成り立つことを導こう。キ - となる以下の関係を示すのは演習問題に委ねる。

$$(2.2) \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq a + 1/n\}$$

条件 (ii) のもとでは、(2.2) 右辺の各集合は \mathcal{B} に属する。それらの可算合併は、定義 1.2(iii) により、 \mathcal{B} に属する。従って、条件 (ii) から条件 (iv) が導かれる。以下の関係

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq a - 1/n\}$$

を使って、条件 (iii) から条件 (i) を導くことも同様に議論できる。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(i)} & \Leftrightarrow & \text{(ii)} \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \text{(iii)} & \Leftrightarrow & \text{(iv)}
 \end{array}$$

という論理の循環図式ができあがったので、4条件は同値である。 \square

2.3 演習問題. (2.2) を証明せよ。

ここでちょっとしたトリックにふれる。

2.4 補題. (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{B}$.

(iii) $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

証明. 定義 1.2(i), (ii) により $\mathbb{R}^d = \emptyset^c \in \mathcal{B}$ である。(ii) 前半を示すのに使うトリックは

$$A_1 := A, A_2 := B, A_n = \emptyset \quad n \geq 3$$

とおくことである。このとき $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}$ であるから、定義 1.2(iii) により

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

(iii) を示すには集合演算のルールを使う。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)^c \right)^c$$

定義 1.2(ii), (iii) を使うと、 $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}$ という仮定のもと右辺が \mathcal{B} に属することが導かれる。(ii) 後半を (iii) から導くのに使うトリックは

$$A_1 := A, A_2 := B, A_n = \mathbb{R}^d \quad n \geq 3$$

とおくことである。 \square

2.5 系. 関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が \mathcal{B} -可測なら、 $\{x \in \mathbb{R}^d : a \leq f(x) < b\} \in \mathcal{B} \forall a < \forall b$ である。

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : a \leq f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < b\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq a\}$ を使う。右辺の各集合は補題 2.1 により \mathcal{B} に属し、共通部は補題 2.4(ii) により \mathcal{B} に属する。 \square

2.6 補題. $A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. 有限加法性(finite additivity)

証明. 補題 2.4 の証明と同じトリックを使って、定義 1.3(iii) から結論を引き出す。 \square

約束

以後、測度の σ -加法性というときは有限加法性も込める。

2.7 定義. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 \mathcal{B} -単関数とする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu := \sum_{y \in \text{Image } f} y \mu(f^{-1}\{y\}) \quad \text{値としては } +\infty \text{ も許容}$$

もし $0 \in \text{Image } f$ かつ $\mu(f^{-1}\{0\}) = +\infty$ の場合にはそれらの積は 0 と約束をしておく。

約束および警告

$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ における加法および乗法を $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ にまで拡張しておく。問題なのは 0 と ∞ の積であるがこれを 0 と約束する。重要なのは分配則

$$a(x + y) = ax + ay \quad \forall a \forall x \forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

が生き残るところである。だが調子に乗って $\infty - \infty = (1 - 1)\infty = 0\infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。分配法則の運用は慎重になる必要がある。

2.8 補題. 非負値 \mathcal{B} -単関数の積分は非負であり、恒等的に値 0 をとる関数の積分は 0 である。

証明. 定義 2.7 から直ちに分かる。 □

2.9 補題. $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を $\text{Image } g$ が有限集合であるような関数とする。このときその \mathcal{B} -可測性は条件 $g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \quad \forall y \in \text{Image } g$ と同値である。

証明. 論理図式 $g \mathcal{B}$ -可測 $\Rightarrow g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \quad \forall y \in \text{Image } g$ を示すには次の関係を使う。

$$g^{-1}\{y\} = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = y\} = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq y\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \geq y\}$$

g の可測性により右辺の各集合は \mathcal{B} に属する。それらの共通部としてあらわされる $g^{-1}\{y\}$ も \mathcal{B} に属する。逆向きの論理図式 $g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B} \quad \forall y \in \text{Image } g \Rightarrow g \mathcal{B}$ -可測を示すには関係

$$\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) < a\} = \bigcup_{y \in \text{Image } g : y < a} g^{-1}\{y\}$$

を使えば良い。 $\text{Image } g$ は有限集合であるから右辺は有限合併である。 □

2.10 注意. 補題 2.9 の同値性は $\text{Image } g$ が可算無限であるという前提のもとでも成り立つ。

記号

集合 A に対しその要素の個数を $\sharp A$ と表記する。

2.11 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathcal{B} -単関数、 $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を関数（可測性などは要求しない）とする。合成関数 $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ も \mathcal{B} -単関数である。

証明. まず関数 h の像が有限集合であることを確かめる。次の関係が決定的である。

$$(2.12) \quad \text{Image}(f, g) := \{(f(x), g(x)); x \in \mathbb{R}^d\} \subset \{(y, z); y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g\}.$$

(左辺の方が右辺より真に小さい集合でありうる。具体例を与えてみよ。) 従って

$$\# \text{Image}(f, g) \leq \# \text{Image } f \# \text{Image } g$$

他方、関数 h の像については

$$\text{Image } h = \{\phi((f(x), g(x))); x \in \mathbb{R}^d\} = \{\phi(y, z); (y, z) \in \text{Image}(f, g)\} = \phi(\text{Image}(f, g))$$

という関係が成り立つ。以上により

$$\# \text{Image } h \leq \# \text{Image}(f, g) \leq \# \text{Image } f \# \text{Image } g < +\infty$$

関数の \mathcal{B} -可測性のチェックポイントとしては補題 2.9 にあるものを使おう。(2.12) により

$$(2.13) \quad \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(f(x), g(x)) = t\} = \bigcup_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g : \phi(y, z) = t} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = y, g(x) = z\}$$

右辺の各集合は $f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}$ と表現でき、補題 2.9 と補題 2.4 により、 \mathcal{B} に属することがわかる。右辺はそのような集合の有限合併であるからやはり \mathcal{B} に属する。 \square

2.14 系. \mathcal{B} -単関数 f, g と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し 1 次結合 $af + bg$ と積 fg も \mathcal{B} -単関数である。

証明. $\phi(y, z) = ay + bz$ あるいは $\phi(y, z) = yz$ として補題 2.11 を適用する。 \square

2.15 補題. $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 \mathcal{B} -単関数、 A を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の有限部分集合とする。

$$\text{Image } h \subset A \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} h \mu = \sum_{t \in A} t \mu(h^{-1}\{t\})$$

証明. 右辺の方が余分に加えていることになるが、実際は $t \notin \text{Image } h$ なら $h^{-1}\{t\} = \emptyset$ である。測度の性質により $\mu(\emptyset) = 0$ だから、余分に足しているところは影響しない。 \square

2.16 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathcal{B} -単関数、 $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値関数とする。合成関数 $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ は非負値 \mathcal{B} -単関数であって

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(f, g) \mu = \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g} \phi(y, z) \mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

証明. h が単関数であることはすでに補題 2.11 で示した。さて (2.13) を書き直すと

$$h^{-1}\{t\} = \bigcup_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g : \phi(y, z) = t} f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}$$

次が最大のポイントである。

右辺の集合たちは \mathcal{B} に属しかつ互いに交わらない。

有限合併であるから補題 2.6 を適用できる。したがって

$$\begin{aligned} t\mu(h^{-1}\{t\}) &= \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g: \phi(y,z)=t} t\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \\ &= \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g: \phi(y,z)=t} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \end{aligned}$$

ただし両辺に t を掛けてある。ここで (2.12) によれば

$$\text{Image } h = \phi(\text{Image}(f, g)) \subset \{\phi(y, z); y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g\} =: A$$

補題 2.15 を念頭に置いて、 t について A 上で足しあわせよう。

$$(*) \quad \sum_{t \in A} t\mu(h^{-1}\{t\}) = \sum_{t \in A} \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g: \phi(y,z)=t} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

有限集合 A の選び方により、右辺は次に一致する。

$$\sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g} \phi(y,z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

他方、補題 2.15 により $(*)$ の左辺は h の積分と等しい。 □

2.17 系. $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 \mathcal{B} -単関数とする。

$$(i) \quad a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ なら } \int_{\mathbb{R}^d} (af + bg) \mu = a \int_{\mathbb{R}^d} f \mu + b \int_{\mathbb{R}^d} g \mu. \quad (\text{右辺においては } 0\infty = 0)$$

$$(ii) \quad g \leq f \text{ なら } \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu.$$

$$(iii) \quad \max\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} h \mu; h \text{ 非負値 } \mathcal{B}\text{-単関数}, h \leq f \right\} = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu.$$

証明. まず $\phi(y, z) = a \max\{y, 0\} + b \max\{z, 0\}$ として定理 2.16 を適用する。非負値 \mathcal{B} -単関数 $af + bg$ に対してつぎの関係が得られる。

$$\int_{\mathbb{R}^d} (af + bg) \mu = \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g} (ay + bz)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

右辺を変形するためにさらに $\phi(y, z) = \max\{y, 0\}$ として定理 2.16 を適用してみよう。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g} y\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

同様にして次も導くことができる。

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \mu = \sum_{y \in \text{Image } f, z \in \text{Image } g} z\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

以上を組み合わせると (i) がわかる。さて系 2.14 により $f - g$ も \mathcal{B} -単関数である。非負値であるからその積分は補題 2.8 により非負値である。そこで (i) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_{\mathbb{R}^d} (f - g + g) \mu = \int_{\mathbb{R}^d} (f - g) \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \geq \int_{\mathbb{R}^d} g \mu$$

となる。よって (ii) が示せた。(iii) は (ii) から直ちに従う。 □

記号

\mathbb{R}^d の部分集合 A に対しその定義関数(indicator function) を 1_A と表記する。

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

2.18 補題. \mathbb{R}^d の部分集合 A に対し、同値性 $A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow 1_A \mathcal{B}$ -可測 が成り立つ。

2.19 演習問題. 補題 2.18 を証明せよ。

2.20 補題. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする。このとき $\sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i}$ は非負値 \mathcal{B} -単関数であって次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i} \mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(A_i).$$

2.21 演習問題. 補題 2.20 を証明せよ。

3 非負値可測関数の積分

この節では非負値可測関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく。

前提

(\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

積分を測度論の設定で述べるのはメリットが沢山あるからで、解析の現場で直面する極限の交換操作が柔軟に行え、しかもその判定条件が簡潔であるというのはメリットの一つに過ぎない。その中心となるのが単調収束定理であり、定義 1.6 の中に最初から組み込まれている。再確認しよう。

関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値かつ \mathcal{B} -可測なものとする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g \mu ; g \text{ 非負値 } \mathcal{B}\text{-単関数}, g \leq f \right\} \quad \text{値としては } +\infty \text{ も許容}$$

系 2.17(iii) により単関数から可測関数への拡張はシ - ムレスである。

3.1 補題. 非負値 \mathcal{B} -可測関数の積分は非負値である。

証明. 非負値 \mathcal{B} -単関数の積分は非負値であることから従う。□

約束および再警告

0 と $+\infty$ の積、0 と $-\infty$ の積はともに 0 とする。だが調子に乗って $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 0 \infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。極限操作の運用は慎重になる必要がある。

3.2 補題. \mathcal{B} -可測関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して af も \mathcal{B} -可測である。

3.3 演習問題. 補題 3.2 を示せ。

記号

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \mathbb{R}_{> 0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

3.4 補題. $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。

(i) $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} af \mu = a \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$. (ii) $g \leq f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$. 積分の単調性

(iii) $A \in \mathcal{B}, b \in \mathbb{R}_{> 0}, b \leq f(x) \forall x \in A \Rightarrow \mu(A) \leq \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$. Markov の不等式

証明. (i), (ii) は演習問題とする。補題 2.20 によれば、 $b1_A$ は非負値 \mathcal{B} -可測関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d} b1_A \mu = b\mu(A)$$

がなりたつ。一方 $b1_A \leq f$ が満たされる。よって (ii) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} b1_A \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$$

を得る。 $b > 0$ で割ることにより結論 (iii) に至る。□

3.5 演習問題. 補題 3.4(i), (ii) を示せ。

3.6 系. $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。

(i) $f^{-1}\{+\infty\} \in \mathcal{B}$. (ii) $\int_{\mathbb{R}^d} f \mu < +\infty \Rightarrow \mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$.

証明. (i) は関係 $f^{-1}\{+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq n\}$ から導かれる。(ii) を示すには $A = f^{-1}\{+\infty\}$ として補題 3.4(iii) を適用する。□

単調収束定理を次の命題に帰着させて証明する。そのさい測度の σ -加法性が重要になる。

3.7 補題. a_n, b_n 非負値単調増加列 $\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$.

3.8 演習問題. 補題 3.7 を示せ。ただし数列 a_n, b_n は値 $+\infty$ を取りうることに注意せよ。

記号

集合 A, B に対し $A \subset B$ の場合に $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$ と表記する。

3.9 補題. (i) $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B), \mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B, \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

証明. $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{B}, A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ なので有限加法性が適用できる。□

3.10 補題. (i) $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$
(ii) $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_1) < +\infty \Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

証明. (i) $B_1 := A_1, B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ for $n \geq 2$ とおく。このとき

$$(3.11) \quad \bigcup_{k=1}^n B_k = A_n \forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$(3.12) \quad B_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}, B_n \cap B_m = \emptyset \text{ if } n > m$$

(3.11) を示すのは演習問題とする。(3.12) 後半は $B_n \subset (A_{n-1})^c$ と $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$ を使うと確かめられる。 μ の σ -加法性を適用すると次が得られる。

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

従って $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ である。

(ii) 今度は $B_n := A_1 \setminus A_n$ for $n \in \mathbb{N}$ とおく。このとき

$$(3.13) \quad A_n = A_1 \setminus B_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

ここで重要な仮定 $\mu(A_1) < +\infty$ を使う。補題 3.9(i) により

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_1) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}, \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \mu(A_1) < +\infty$$

である。よって補題 3.9(ii) により

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n), \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

さて $B_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset B_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ なので (i) を適用できる。すなわち $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$ は $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ に等しい。従って $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ は $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ に一致する。□

3.14 演習問題. (3.11), (3.13) を示せ。

3.15 補題. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列、 $A \in \mathcal{B}, b \in \mathbb{R}_{>0}$ とする。

$$f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, b \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \forall x \in A \Rightarrow b\mu(A) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu.$$

証明. $0 < r < b$ とする。条件 $f_n \leq f_{n+1}$ から次が従う。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f_{n+1}(x) > r\}.$$

さて f_n たちの \mathcal{B} -可測性により、上の各集合は \mathcal{B} に属する。よって補題 3.10(i) が適用でき

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}\right).$$

各 $x \in A$ に対して $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > r$ 即ちある番号 n が存在して $f_n(x) > r$ であるので

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}$$

が分かる。従って補題 3.9(i) により

$$(*) \quad \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}).$$

集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}$ と関数 f_n の組に補題 3.4(iii) を適用すると

$$r\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

従って (*) とあわせて

$$r\mu(A) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} r\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > r\}) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

が導かれる。 r は $0 < r < b$ であれば任意なので結論を得る。 \square

3.16 系. f_n を非負値 \mathcal{B} -単関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の列、 $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 \mathcal{B} -単関数とする。

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, g(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu.$$

証明. $y \in \text{Image } g$, $y > 0$ とする。記号の煩雑を避けるため適宜 $A = g^{-1}\{y\}$ とかく。関数 $1_A f_n$ も系 2.14 により \mathcal{B} -単関数である。また非負であることは明らか。

$$1_A f_n \leq 1_A f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, y = g(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_A(x) f_n(x) \quad \forall x \in A$$

なので補題 3.15 を適用できる。従って

$$y\mu(g^{-1}\{y\}) = y\mu(A) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu$$

上は $y = 0$ の場合も成り立つ。ここで $1_A f_n \leq 1_A f_{n+1}$ を再び使う。補題 3.4(ii) により

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_{n+1} \mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \text{Image } g$$

よって y についての和に対して補題 3.7 を適用できる。

$$\sum_{y \in \text{Image } g} y\mu(g^{-1}\{y\}) \leq \sum_{y \in \text{Image } g} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \text{Image } g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu$$

左辺は定義より $\int_{\mathbb{R}^d} g \mu$ である。従って

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \text{Image } g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu$$

あとは各 $n \in \mathbb{N}$ に対して次の等式の成立を言えば証明が完結する。

$$\sum_{y \in \text{Image } g} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{g^{-1}\{y\}} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu.$$

各 $1_{g^{-1}\{y\}} f_n$ は非負値 \mathcal{B} 単関数であり系 2.17(i) の前提条件は満たされている。

$$\sum_{y \in \text{Image } g} 1_{g^{-1}\{y\}}(x) f_n(x) = f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

であるので上の等式が成立することを得る。 □

記号

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して次の関数 $\phi_n : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ を導入する。

$$\phi_n(y) := \begin{cases} 0 & y < 1/2^n \\ (k-1)/2^n & (k-1)/2^n \leq y < k/2^n, k = 2, 3, \dots, 2^n \\ n & y \geq n \end{cases}$$

3.17 補題. (i) $\phi_n(y) \leq \phi_{n+1}(y) \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \overline{\mathbb{R}}$. $y < z \Rightarrow \phi_n(y) \leq \phi_n(z)$.

(ii) $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。このとき $g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi_n(f(x))$ は非負値 \mathcal{B} -単関数であり、列 g_n は $g_n \leq g_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ を満たす。

証明. (i) のチェックは演習問題とする。(ii) (1.1) で登場した分割を考える。

$$A(n, k) := \{x \in \mathbb{R}^d : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\} \quad k = 2, 3, \dots, 2^n$$

$$A(n, \infty) := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq n\}$$

系 2.5 により上にあげた集合はいずれも \mathcal{B} に属する。 g_n が非負値 \mathcal{B} -単関数であるのは

$$g_n = \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{A(n,k)} + n 1_{A(n,\infty)}$$

よりわかる。あとは $\sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(y) = \max\{y, 0\} \quad \forall y \in \overline{\mathbb{R}}$ を使えばよい。 □

次は単調収束定理(monotone convergence theorem) と呼ばれる。

3.18 定理. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列、 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu.$$

証明. まず各 f_n は非負値 \mathcal{B} -可測関数で $f_n \leq f$ を満たすから、補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{従って} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu.$$

他方 $f_n \leq f_{n+1}$ であるから補題 3.17(i) より

$$\phi_n(f_n(x)) \leq \phi_{n+1}(f_n(x)) \leq \phi_{n+1}(f_{n+1}(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \forall n \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。 $k \leq n$ なる番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_k \leq f_n$ であるから

$$\phi_n(f_k(x)) \leq \phi_n(f_n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

補題 3.17(ii) より $f_k(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(f_k(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ であるから

$$f_k(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{従って} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

ここで $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値 \mathcal{B} -単関数で $g \leq f$ を満たすものとしよう。

$$g(x) \leq f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_k(x) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

合成関数 $x \mapsto \phi_n(f_n(x))$ は非負値 \mathcal{B} -単関数なので系 3.16 により

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n \circ f_n \mu$$

が得られる。さて $\phi_n(f_n(x)) \leq f_n(x)$ であったので補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n \circ f_n \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は非負値 \mathcal{B} -単関数で $g \leq f$ であれば任意なので、積分の定義より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

これと証明冒頭で述べたことを合わせて結論を得る。 □

4 可積分関数とその積分

可積分な可測関数とその積分についていくつか基本的な性質を明らかにする。

前提

(\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

積分と呼ばれるには相応しい性質が備わっていなければならぬ。その一つが補題 3.4(ii) で述べた単調性で、もう一つは線形性である。ただし、関数のとる値として $+\infty, -\infty$ も許しているので少々注意が必要である。 $\infty - \infty$ を回避するために次のように取り決める。

約束

関数 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して条件 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} = \emptyset, \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} = \emptyset$ が成立するときに限って和 $f + g$ を考える。

次にはっきりさせておくべきは可測性である。

4.1 補題. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数とする。和が定義可能なら $f + g$ も \mathcal{B} -可測である。

証明. 次の関係を使えばよいがその検証は演習問題に委ねる。

$$(4.2) \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b, g(x) > a - b\}$$

ここで、有理数全体 \mathbb{Q} の可算性により、右辺は可算無限合併である。 □

4.3 演習問題. (4.2) を示せ。

4.4 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。和 $f + g$ も非負値 \mathcal{B} -可測であって

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f + g) \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g \mu. \quad \text{積分の線形性}$$

証明. 関数 f, g に対して補題 3.17(ii) の手続きで構成される非負値 \mathcal{B} 単関数の列をそれぞれ f_n, g_n とする。このとき非負値 \mathcal{B} 可測関数の列 $f_n + g_n$ は $f_n + g_n \leq f_{n+1} + g_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ を満たし、さらに補題 3.7 により

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x) + g_n(x)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) + \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = f(x) + g(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$$

従って列 $f_n + g_n$ に定理 3.18 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f + g) \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} (f_n + g_n) \mu$$

f_n, g_n は非負値 \mathcal{B} 単関数であるから右辺は系 2.17(i) により次に等しい。

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g_n \mu \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n \mu$$

ここで再び補題 3.7 を適用したわけだが、事前に $f_n \leq f_{n+1}$ なので $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_{n+1} \mu$ であると確認するのを怠ってはいけない。列 f_n, g_n それぞれに定理 3.18 を適用して得られる

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} g \mu$$

の和をとったものがまさに示そうとしていた等式の右辺である。 □

4.5 補題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数とする。このとき $|f|, \max\{f, 0\}, \max\{-f, 0\}$ はいずれも非負値 \mathcal{B} -可測関数であって次の同値性が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu < +\infty, \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu < +\infty.$$

証明. 関数 $\max\{f, 0\}$ の \mathcal{B} -可測性を確かめる。それは以下の関係から分かる。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \max\{f(x), 0\} < a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a \leq 0 \\ \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} & \text{if } a > 0 \end{cases}$$

同様に $\max\{-f, 0\}$ の可測性も導ける。さて $|f| = \max\{f, 0\} + \max\{-f, 0\}$ である。定理 4.4 を使うと $|f|$ の可測性と次の等式を得る。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu.$$

従って同値性が得られた。 □

補題 4.5 をふまえて定義 1.8 を再確認しておこう。

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数とする。 f が μ -可積分であるとは

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu < +\infty$$

が成り立つことをいう。このとき f の μ についての積分を次で定義する。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu := \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu.$$

非負値関数については $\max\{-f, 0\} = 0$ であるから、非負値可測関数から一般の可測関数への拡張はやはりシ - ムレスである。

約束

\mathcal{B} -可測かつ μ -可積分な関数を今後は (\mathcal{B}, μ) -可積分関数(integrable function) と言うことにする。

次は可積分性判定(integrability criterion) を優関数により行う手順で、非常に有効である。

4.6 演習問題. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数とする。 $|f| \leq g$ (従って g は非負値) でありかつ $\int_{\mathbb{R}^d} g \mu < +\infty$ であるなら f は μ -可積分であることを示せ。

以下、可積分な可測関数とその積分について基本的な性質を列挙していくわけだが、とりわけ定理 4.7、定理 4.9 および定理 4.10 に提示される不等式は多くの場面で登場する重要なものである。

約束と再警告

0 と $+\infty$ の積、0 と $-\infty$ の積はともに 0 とする。だが調子に乗って $\infty - \infty = (1 - 1)\infty = 0\infty = 0$ という類の計算をしてはいけない。分配法則の運用は慎重になる必要がある。

4.7 定理. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数とする。

(i) $a \in \mathbb{R}$ に対して af も (\mathcal{B}, μ) -可積分関数であって $\int_{\mathbb{R}^d} af \mu = a \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$.

(ii) 不等式 $\left| \int_{\mathbb{R}^d} f \mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu$ が成り立つ。 $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = 0$

4.8 演習問題. 定理 4.7 を示せ。

次の定理は積分の単調性を可積分関数について述べている。

4.9 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数とする。 $g \leq f \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$.

証明. $g \leq f$ なので条件

$$\max\{g, 0\} \leq \max\{f, 0\}, \max\{-f, 0\} \leq \max\{-g, 0\}$$

が成り立ち、補題 3.4(ii) が適用できる。すなわち

$$\int_{\mathbb{R}^d} \max\{g, 0\} \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu, \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g, 0\} \mu.$$

各積分は有限の値であるから、辺々たしあわせて移項すると求める不等式に至る。 \square

次の定理は積分の線形性を可積分関数について述べている。

4.10 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数とする。和が定義可能なら $f + g$ も (\mathcal{B}, μ) -可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f + g| \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu + \int_{\mathbb{R}^d} |g| \mu, \int_{\mathbb{R}^d} (f + g) \mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu + \int_{\mathbb{R}^d} g \mu$$

証明. 和が定義可能なので $f + g$ も \mathcal{B} -可測である。さらに $|f + g| \leq |f| + |g|$ であるから、補題 3.4(ii) と定理 4.4 を適用して最初の不等式が得られる。従って $f + g$ も μ -可積分である。さて $f(x) = +\infty, g(x) = -\infty$ となる $x \in \mathbb{R}^d$ は存在しない。また $f(x) = -\infty, g(x) = +\infty$ となる $x \in \mathbb{R}^d$ も存在しない。よって

$$\max\{f + g, 0\} + \max\{-f, 0\} + \max\{-g, 0\} = \max\{-f - g, 0\} + \max\{f, 0\} + \max\{g, 0\}$$

という関係が成り立ち、定理 4.4 が適用できる。すなわち

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f + g, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g, 0\} \mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f - g, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{g, 0\} \mu \end{aligned}$$

各積分は有限の値であるから、移項して整理すると

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f + g, 0\} \mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f - g, 0\} \mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu + \int_{\mathbb{R}^d} \max\{g, 0\} \mu - \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-g, 0\} \mu \end{aligned}$$

左辺は $f + g$ の積分であり、右辺は f, g それぞれの積分の和である。 \square

4.11 注意. 定理 4.10 ではいちいち和が定義可能ならという前提がつくのが何とも煩わしい。これから逃れるには、測度 0 という概念を導入して少し議論する必要がある。

記号

\mathcal{B} -可測関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対し $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu$ を f の L^1 セミノルム(semi-norm) という。

L^1 セミノルムは補題 3.4(i) と定理 4.10 により以下に述べる性質を持つ。

$$\|f\|_1 \geq 0, a \in \mathbb{R} \text{ に対し } \|af\|_1 = |a|\|f\|_1, f+g \text{ が定義可能なら } \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\|\cdot\|_1$ を L^1 ノルムではなく L^1 セミノルムと呼ぶ理由は次の補題で説明される。

4.12 補題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数とするとき以下は同値である。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0.$$

証明. まず $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0$ と仮定しよう。補題 3.4(iii) によれば各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\}) \leq n \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0$$

が成り立つ。ところで $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/(n+1)\}$ かつ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\} = \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$$

である。よって補題 3.10(i) により

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq 1/n\}) = 0.$$

次に $\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0$ と仮定する。非負値 \mathcal{B} -単関数 g で $g \leq |f|$ を満たすものをひとまず固定する。 $y \in \text{Image } g, y > 0$ としよう。

$$0 < y = g(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in g^{-1}\{y\} \quad \text{従って } g^{-1}\{y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$$

即ち $g^{-1}\{y\}$ は μ -測度 0 の集合に包含されるので補題 3.9(i) より、

$$y \in \text{Image } g, y > 0 \Rightarrow \mu(g^{-1}\{y\}) = 0$$

従って $\int_{\mathbb{R}^d} g \mu = 0$ となり、積分の定義より $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0$ を得る。 □

4.13 演習問題. \mathcal{B} -可測関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目) であって条件

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}) = 0$$

を満たすものの全体は線形空間をなすことを示せ。

4.14 補題. \mathcal{B} -可測関数 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して積 fg も \mathcal{B} -可測である。

証明. 関数の値として $+\infty, -\infty$ も許すので少し面倒である。 $a > 0$ とする。

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < f(x)g(x) < a\} \\ &= \bigcup_{b \in \mathbb{Q}: b > 0} \{x : 0 < f(x) < b, 0 < g(x) < a/b\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Q}: b < 0} \{x : b < f(x) < 0, a/b < g(x) < 0\} \end{aligned}$$

このように可算無限合併で表わせ、さらに

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) \leq 0\} = \{x : f(x) \geq 0, g(x) \leq 0\} \cup \{x : f(x) \leq 0, g(x) \geq 0\}$$

である。従って $a > 0$ のとき

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) < a\} = \{x : 0 < f(x)g(x) < a\} \cup \{x : f(x)g(x) \leq 0\} \in \mathcal{B}.$$

次に

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) < 0\} = \{x : f(x) > 0, g(x) < 0\} \cup \{x : f(x) < 0, g(x) > 0\} \in \mathcal{B}.$$

残っているのは $a < 0$ の場合である。このときは $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) < a\}$ が

$$\bigcup_{b \in \mathbb{Q}: b > 0} \{x : f(x) > b, g(x) < a/b\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Q}: b < 0} \{x : f(x) < b, g(x) > a/b\}$$

に等しいことを使えばよい。 □

よって \mathcal{B} -可測関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $A \in \mathcal{B}$ に対して $1_A f$ は \mathcal{B} -可測である。

4.15 定義. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数、 $A \in \mathcal{B}$ とする。 $1_A f$ が μ -可積分のとき f は可測集合 A 上で μ -可積分という。 f が A 上で非負値または μ -可積分のとき

$$\int_A f \mu := \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f \mu.$$

を f の可測集合 A 上での積分という。

4.16 注意. 0 と ∞ の積は 0 という約束により $1_A(x)f(x) = 0 \forall x \in A^c$ である。

4.17 補題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数、 $A \in \mathcal{B}$ とする。

- (i) f 非負値 $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_A f \mu + \int_{A^c} f \mu.$
- (ii) f は μ -可積分 $\Leftrightarrow f$ は A 上で μ -可積分かつ A^c 上で μ -可積分
- (iii) f は μ -可積分 $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_A f \mu + \int_{A^c} f \mu.$

証明. $f = 1_A f + 1_{A^c} f$ なので定理 4.4 を適用して (i) が導ける。また $|f|$ に (i) を適用して (ii) を得る。(iii) は定理 4.10 と (ii) を適用して導ける。□

4.18 系. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数、 $A \in \mathcal{B}$ とする。

(i) $\mu(A) = 0 \Rightarrow f$ は A 上で μ -可積分かつ $\int_A f \mu = 0$.

(ii) f μ -可積分 (あるいは非負値)、 $\mu(A^c) = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_A f \mu$.

証明. (i) $\{x \in \mathbb{R}^d : 1_A(x)f(x) \neq 0\} \subset A$ であるから補題 3.9(i) より、

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : 1_A(x)f(x) \neq 0\}) \leq \mu(A) = 0$$

である。従って補題 4.12 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |1_A f| \mu = 0$$

を得る。とくに $1_A f$ は μ -可積分である。さらに定理 4.7(ii) より $\int_A f \mu = 0$ が従う。

(ii) $\mu(A^c) = 0$ なので補題 4.17 と (i) を適用して結論を得る。□

次は増加集合列により可積分性判定をするもので演習問題 4.6 とセットで効力が強化される。証明のポイントは単調収束定理の使い方にあり、次の節の主題と大いにつながる。

4.19 演習問題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} -可測関数、 $A_n \in \mathcal{B}$ $n \in \mathbb{N}$ を

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \quad \text{かつ} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^d$$

であるような集合列とする。このとき次の同値性を示せ。

$$f \text{ } \mu\text{-可積分} \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} |f| \mu < +\infty$$

5 Lebesgue の収束定理

この節では測度論的な積分の長所のひとつである収束定理の明解さを紹介する。その根元にあるのが定理 3.18 すなわち単調収束定理である。

前提

(\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

5.1 補題. f_n を \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。以下の関数はすべて \mathcal{B} -可測である。

$$x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) > a\}$ などを示せばよい。□

5.2 演習問題. 補題 5.1 を示せ。

5.3 演習問題. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。関数 $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は \mathcal{B} -可測であることを示せ。

次は項別積分定理 (term-by-term integration) であるが、非負性に留意せよ。

5.4 補題. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mu.$$

証明. 正項級数については $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n a_k$ であるから定理 4.4 と定理 3.18 に帰着する。□

5.5 定理. $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする。

- (i) 関数 $\nu: \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \int_A f \mu$ は測度である。積分の σ -加法性
- (ii) 任意の非負値 \mathcal{B} -可測関数 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \nu = \int_{\mathbb{R}^d} g f \mu. \quad \text{絶対連続測度による積分}$$

証明. (i) $A_n \in \mathcal{B} \quad n \in \mathbb{N}$ かつ $A_n \cap A_m = \emptyset \quad n \neq m$ とする。 $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とかくと $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} f = 1_A f$ であるから、補題 5.4 を適用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \mu = \int_A f \mu = \nu(A)$$

を得るが、これは σ 加法性に他ならない。

(ii) まず g が単関数である場合を考える。このとき補題 3.4(i) と定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \nu = \sum_{y \in \text{Image } g} y \nu(g^{-1}(\{y\})) = \sum_{y \in \text{Image } g} y \int_{g^{-1}(\{y\})} f \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{y \in \text{Image } g} y 1_{g^{-1}(\{y\})} f \mu$$

となるが、右辺の被積分関数はちょうど gf である。一般には補題 3.17(ii) により非負値 \mathcal{B} -単関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の列 g_n で $g_n \leq g_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} g_n \nu = \int_{\mathbb{R}^d} g_n f \mu$ なので定理 3.18 を適用して結論に至る。□

次は *Fatou* の補題と呼ばれるが、事実上は定理と冠されるに相応しい内容を持つ。

5.6 定理. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu.$$

証明. 非負値 \mathcal{B} -可測関数列 $\inf_{k \geq n} f_k$ に定理 3.18 が適用できるので

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k \geq n} f_k \mu$$

を得る。他方、補題 3.4(ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k \geq n} f_k \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_k \mu \quad \forall k \geq n \quad \text{従って} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{k \geq n} f_k \mu \leq \inf_{k \geq n} \int_{\mathbb{R}^d} f_k \mu$$

以上を組み合わせて結論に至る。 \square

次の定理は *Lebesgue* の優収束定理 (Lebesgue dominated convergence theorem) あるいは単に *Lebesgue* の収束定理と呼ばれ、測度論的な積分に関しては一つの頂点である。

5.7 定理. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数、 f_n を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列で

$$\exists g (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分 s.t. } |f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

を満たすものとする。このとき数列 $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ は $\int_{\mathbb{R}^d} f \mu$ に収束する。

証明. $A := \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) < +\infty\}$ とおく。系 3.6 より $A \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(A^c) = 0$ である。系 4.18(ii) を適用して次が分かる。

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n \mu, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f \mu$$

さて $|f_n| \leq g$ かつ $g(x) < +\infty \quad \forall x \in A$ なので $1_A g + 1_A f_n$ は定義可能で、非負値である。 $1_A g + 1_A f$ についても同様のことがいえる。定理 5.6 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} (1_A g + 1_A f_n) \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (1_A g + 1_A f_n) \mu.$$

仮定より $\liminf_{n \rightarrow \infty} (1_A g + 1_A f_n) = 1_A g + 1_A f$ なので定理 4.10 も考慮に入れて

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu + \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu + \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n \mu \right)$$

を得る。各積分は有限の値であるから移項してさらに (*) とあわせて

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

が導ける。 $1_A g - 1_A f_n$ についても同様の考察をすることにより

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \mu$$

が示せるので、 $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ は $\int_{\mathbb{R}^d} f \mu$ に収束する。 \square

Fatou の補題と Lebesgue の収束定理を組み合わせて次の形で利用することも多く *Lebesgue-Fatou* の補題と呼ばれる。その証明はかなり重複するが、あえて省略せずに述べておく。

5.8 定理. f_n を (\mathcal{B}, μ) -可積分関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列で次を満たすものとする。

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu < +\infty, \exists g (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分 s.t. } f_n(x) \geq g(x) \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

このとき $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ は (\mathcal{B}, μ) -可積分で、 $\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ が成り立つ。

証明. $A := \{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| < +\infty\}$ とおく。系 3.6 より $A \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(A^c) = 0$ である。さて $f_n \geq g$ かつ $g(x) \neq +\infty, -\infty \forall x \in A$ なので $1_A f_n - 1_A g$ は定義可能で、非負値である。 $1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - 1_A g$ についても同様である。定理 5.6 により次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} (1_A f_n - 1_A g) \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (1_A f_n - 1_A g) \mu$$

$\mu(A^c) = 0$ なので系 4.18(ii) が適用できる。定理 4.10 も考慮に入れて次を得る。

$$\begin{aligned} (\star) \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - 1_A g) \mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n \mu - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu < +\infty \end{aligned}$$

これは非負値関数 $1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - 1_A g$ の (\mathcal{B}, μ) -可積分性を意味する。従って

$$1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = (1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - 1_A g) + 1_A g \text{ は } (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分である}$$

ことが定理 4.10 を適用して導ける。さらに (\star) から

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$$

が導ける。 $\mu(A^c) = 0$ なので、補題 4.17 と系 4.18(i) により $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ は (\mathcal{B}, μ) -可積分でありかつ左辺はその積分に等しいことを得る。□

いわゆる極限と積分の順序交換に関しては、以下に述べる命題が手助けとなる。

5.9 補題. \mathbb{R}^p の部分集合 $E \neq \emptyset$, $a \in E$ と関数 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次の同値性が成り立つ。

f は a で連続 \Leftrightarrow 任意の a に収束する E の点列 a_n に対して $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する。

5.10 定理. E を \mathbb{R}^p の空でない部分集合、 $f : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を次のような関数とする。

各 $x \in E$ に対して関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ は \mathcal{B} 可測、
 各 $y \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 $E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ は連続、
 $\exists g (\mathcal{B}, \mu)$ -可積分 s.t. $|f(x, y)| \leq g(y) \forall x \in E \forall y \in \mathbb{R}^d$

このとき関数 $E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \mu(dy)$ は連続である。

5.11 演習問題. 補題 5.9 および定理 5.10 を証明せよ。

5.12 演習問題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathcal{B} 可測関数とする。 $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$ であるなら関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \cos(xf(y)) \mu(dy)$ は一様連続であることを証明せよ。(議論にひと工夫必要)

5.13 注意. うっかりすると見過ごしてしまうが、演習問題 5.12 を考察する際に $y \mapsto \cos(xf(y))$ が \mathcal{B} 可測であることを検証する必要がある。一般に $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とするとき合成関数 $y \mapsto g(f(x))$ も \mathcal{B} 可測である。しかしながらこのような一般命題を証明するにはまだ準備不足なので、 \cos という関数の特殊性を利用した議論を下に与えておく。それは

$$\cos(xf(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(y)$$

という無限級数表示が決め手である。有限和の段階では次の関数が現れる。

$$y \mapsto \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(y)$$

この \mathcal{B} 可測性は補題 3.2、補題 4.1 と補題 4.14 により保証される。よって補題 5.1 を適用して極限関数であるところの $y \mapsto \cos(xf(y))$ が \mathcal{B} 可測であることを得る。

6 測度 0 の集合

この節では測度論的な積分においてキーとなるほとんどいたるところという概念を紹介する。また σ 加法性から導かれる重要な成果の一つである L^1 空間の完備性を証明する。

前提

(\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度とする。

6.1 補題. f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = +\infty\}) = 0.$$

証明. 定理 3.18 により次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu < +\infty$$

ゆえに系 3.6 を適用して結論を得る。 □

6.2 定義. 次の条件を満たす \mathbb{R}^d の部分集合 A を (\mathcal{B}, μ) 零集合(null set) とよぶ。

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } \mu(B) = 0, A \subset B$$

補集合 A^c の方は (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合とよぶ。またある性質の成立する集合が (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合であるとき、その性質は測度 (\mathcal{B}, μ) に関しほとんどいたるところ(almost everywhere) 成立するという。通常 μ -a.e. と略記する。

6.3 例. 補題 4.12 および補題 6.1 はそれぞれ次のように表現される。

- B 可測関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu = 0$ は $f = 0$ μ -a.e. と同値である。
- 非負値 B 可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列 f_n が条件 $f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu < +\infty$ を満たすなら $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n < +\infty$ μ -a.e. である。

6.4 注意. B が (B, μ) 零集合すべてを含む場合、測度 (B, μ) は完備(complete)であるという。 (B, μ) 零集合は必ずしも B に属していないので次の補題が意味を持つ。

6.5 補題. $A \in B$ である場合は A が (B, μ) 零集合とは $\mu(A) = 0$ に他ならない。

証明. (B, μ) 零集合であれば $\mu(B) = 0$, $A \subset B$ を満たす $B \in B$ が存在する。 $A \in B$ であるから補題 3.9(i) を適用して $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) = 0$ と推論できる。□

6.6 補題. $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を B 可測関数とする。このとき以下のいずれの集合も B に属する。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < g(x)\}, \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = g(x)\}.$$

証明. $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a \leq g(x)\}$ などを示せばよい。□

6.7 演習問題. 補題 6.6 を示せ。ただし $f - g$ が定義可能とは限らないので補題 4.1 に帰着させようとしてもだめである。

6.8 定理. $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を B -可測関数とする。

(i) g 非負値かつ $|f| \leq g$ μ -a.e. $\Rightarrow \int_A |f| \mu \leq \int_A g \mu \forall A \in B$.

(ii) f, g μ -可積分かつ $f \leq g$ μ -a.e. $\Rightarrow \int_A f \mu \leq \int_A g \mu \forall A \in B$.

証明. (i) $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \leq g(x)\}$ とおく。 $\mu(B^c) = 0$ なので系 4.18(ii) を適用して

$$\int_A |f| \mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A |f| \mu = \int_B 1_A |f| \mu \leq \int_B 1_A g \mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu = \int_A g \mu \forall A \in B$$

を得る。まん中の不等号は集合 B の決め方により $|1_B 1_A f| \leq 1_B 1_A g$ だから補題 3.4(ii) を適用して導かれる。(ii) についても同様の議論である。□

6.9 演習問題. 定理 6.8(ii) を示せ。

6.10 注意. 定理 6.8(i) は以下の可積分性判定手順を提供する。

$f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を B 可測関数とする。 g が非負値、 $|f| \leq g$ μ -a.e. かつ $\int_{\mathbb{R}^d} g \mu < +\infty$ であるなら f は μ 可積分である。

6.11 系. $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を B 可測関数とする。

(i) f, g 非負値かつ $f = g$ μ -a.e. $\Rightarrow \int_A f \mu = \int_A g \mu \forall A \in B$.

(ii) g μ 可積分かつ $f = g$ μ -a.e. $\Rightarrow f$ μ 可積分かつ $\int_A f \mu = \int_A g \mu \forall A \in B$.

6.12 演習問題. 系 6.11 を示せ。

次の定理は L^1 空間の完備性を述べるもので測度論的設定が大成功を納めた典型例である。更に L^p 空間と呼ばれる対象まで一般化でき、それは *Riesz-Fischer* の定理と呼ばれる。

6.13 定理. $\|\cdot\|_1$ を L^1 セミノルムとする。 f_n を (\mathcal{B}, μ) 可積分関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($\bar{\mathbb{R}}$ でないことに注目) の列で Cauchy の条件 $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_1 = 0$ をみたすものとする。このとき (\mathcal{B}, μ) 可積分関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ が成り立つ。

証明. Cauchy の条件により任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ と $K \in \mathbb{N}$ に対してある $m \in \mathbb{N}$ で $m \geq K$ かつ $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon \forall n > m$ を満たすものが存在する。従って帰納的に自然数列 $\alpha(k)$ で

$$\alpha(k) < \alpha(k+1) \forall k \in \mathbb{N}, \|f_n - f_{\alpha(k)}\|_1 < 1/2^k \forall n > \alpha(k) \forall k \in \mathbb{N}$$

を満たすものが構成できる。非負値 \mathcal{B} 可測関数 $g_k := \sum_{i=1}^k |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|$ について

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_k \mu = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \mu = \sum_{i=1}^k \|f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}\|_1 \leq \sum_{i=1}^k 1/2^i \leq 1$$

$g_k \leq g_{k+1}$ であるから補題 6.1 を適用すると

$$\mu(A^c) = 0 \text{ ただし } A := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^{\infty} |f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x)| < +\infty\} \in \mathcal{B}$$

$x \in A$ なら級数 $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x))$ は絶対収束し、その部分和について

$$\text{第 } k \text{ 部分和} = f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(1)}(x)$$

である。 \mathbb{R}^d 全体で対応するため次の \mathcal{B} 可測関数を導入する。

$$f : x \mapsto 1_A(x) \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{\alpha(k)}(x)$$

可測性は補題 4.14 と補題 5.1 を使って確認できる。 $\forall k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。 $x \in A$ なら級数和は $f(x) - f_{\alpha(1)}(x)$ に等しいので

$$|f(x) - f_{\alpha(k)}(x)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{\alpha(i+1)}(x) - f_{\alpha(i)}(x)| \forall x \in A$$

$\mu(A^c) = 0$ に着目して定理 6.8(ii) と補題 5.4 を適用する。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{\alpha(k)}| \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=k}^{\infty} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \mu = \sum_{i=k}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}| \mu \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$n \in \mathbb{N}$ かつ $n > \alpha(k)$ とする。 $\|f_n - f_{\alpha(k)}\|_1 < 1/2^k$ であったので

$$\|f - f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{\alpha(k)}| \mu + \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\alpha(k)} - f_n| \mu \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}$$

最初の不等号は定理 4.10 による。よって $\|f - f_n\|_1$ は 0 に収束する。 □

次は項別積分定理である。以前の補題 5.4 と異なり被積分関数に非負値性は要求しないがその代わりとなる条件が付いている点に注意されたい。

6.14 定理. f_n を \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目) の列で $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n| \mu < +\infty$ をみたすものとする。このとき以下が成り立つ。

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ μ -a.e., $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$ と $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$ は μ -可積分
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ は絶対収束かつ $\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k \mu$.

証明. 非負値関数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は (\mathcal{B}, μ) 可積分である。なぜなら補題 5.4 を適用すると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n| \mu < +\infty.$$

従って系 3.6 により関数項級数は μ -a.e. 絶対収束している。しかも次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \geq - \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^n f_k \mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n| \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

よって定理 5.8 を適用して $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$ の μ 可積分性と

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k \mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^n f_k \mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} f_k \mu$$

を得る。同様の議論により $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$ の μ 可積分性と

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} f_k \mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k \mu$$

を得る。さて次の包含関係が成り立ち、前者は (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合である。

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x)\}$$

ゆえに系 6.11(ii) を適用して結論に至る。 □

6.15 演習問題. 定理 6.14 において $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu$ は絶対収束することを示せ。

まだ、Lebesgue 測度の存在 (定理 9.6 参照) およびその微積分の基本定理との関係 (定理 10.1 参照) を調べていないので、項別積分定理などを具体例に応用はできないのであるが、それではあまりに味気ないので先取りしておく。次の例で登場する項別積分を Riemann 積分の世界にとどまって適用するには煩わしい前提条件をチェックする必要がある。

6.16 例. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta = 2\pi, 0 \leq \forall r < 1.$

証明. 以後 r は条件を満たすものを固定する。直接計算により

$$(6.17) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \forall \theta \in [-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} 2r^n \cos n\theta d\theta = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

$0 \leq r < 1$ なので左の関数項級数は絶対収束している。一方

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |2r^n \cos n\theta| d\theta \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} 2r^n d\theta = \frac{4\pi r}{1-r} < +\infty$$

が成り立つ。従って定理 6.14 により

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n\theta d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} 2r^n \cos n\theta d\theta.$$

故に (6.17) を考慮して結論に到達する。 □

6.18 演習問題. (6.17) を示せ。

この節を閉じるにあたって (\mathcal{B}, μ) 零集合の重要な性質を述べる。またそれらの典型的な適用例についてもふれる。まずその定義から直ちに分かることは次の通り。

- (i) A (\mathcal{B}, μ) 零集合、 $B \subset A \Rightarrow B$ (\mathcal{B}, μ) 零集合
- (ii) A (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合、 $A \subset B \Rightarrow B$ (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合

6.19 補題. $A_n \in \mathcal{B} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 劣加法性(subadditivity)

証明. $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと次の関係が成り立つ。

$$1_B \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$$

よって補題 3.4(ii) と補題 5.4 を適用して結論を得る。 □

6.20 系. (i) A_n (\mathcal{B}, μ) -零集合 $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (\mathcal{B}, μ) -零集合

(ii) A_n (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合 $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合

6.21 演習問題. 系 6.20 を示せ。

6.22 例. 単調収束定理の拡張。 f_n を非負値 \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の列とする。

$$f_n \leq f_{n+1} \mu\text{-a.e.} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu.$$

証明. $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\} \in \mathcal{B}$ である。関数列 $1_A f_n$ に対して定理 3.18 が適用できるので

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \mu = \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_A f_n \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A f_n \mu.$$

系 6.20(ii) によれば A は (\mathcal{B}, μ) -a.e. 集合である。従って系 4.18 を使って結論を得る。 \square

6.23 補題. f, g, h を \mathcal{B} -可測関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。このとき

(i) $f \leq g$ μ -a.e., $g \leq f$ μ -a.e. $\Rightarrow f = g$ μ -a.e. (ii) $f \leq g$ μ -a.e., $g \leq h$ μ -a.e. $\Rightarrow f \leq h$ μ -a.e.

証明. (i) μ -a.e. 集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq g(x)\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq f(x)\}$ の共通部で表される $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = g(x)\}$ は系 6.20(ii) により μ -a.e. 集合である。 \square

6.24 演習問題. 補題 6.23(ii) を示せ。

6.25 定理. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) 可積分関数とする。

$$\int_A f \mu \leq \int_A g \mu \quad \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f \leq g \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明. 仮定されているのは f, g の可積分性と $\int_A f \mu \leq \int_A g \mu \quad \forall A \in \mathcal{B}$ である。系 3.6 より

$$B := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| < +\infty\} \in \mathcal{B} \text{ かつ } \mu(B^c) = 0$$

また $B \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 1_B(x)f(x) = f(x)\}$ である。従って $1_B f = f$ μ -a.e. なので系 6.11 により

$$\int_A 1_B f \mu = \int_A f \mu \leq \int_A g \mu \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

$A = \{x \in \mathbb{R}^d : 1_B(x)f(x) > g(x)\}$ とえらふ。 $\max\{1_B f - g, 0\} = 1_A(1_B f - g)$ なので、

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \max\{1_B f - g, 0\} \mu = \int_A (1_B f - g) \mu = \int_A 1_B f \mu - \int_A g \mu \leq 0.$$

上の2番目の等号では $1_B f, g$ とともに μ 可積分であることが重要である。従って補題 4.12 により $\max\{1_B f - g, 0\} = 0$ μ -a.e. である。さて

$$\max\{1_B(x)f(x) - g(x), 0\} = 0 \Leftrightarrow 1_B(x)f(x) \leq g(x)$$

であるから、 $1_B f \leq g$ μ -a.e. が得られる。一方すでに確かめたように $f = 1_B f$ μ -a.e. なので補題 6.23 を考慮に入れて結論 $f \leq g$ μ -a.e. を得る。 \square

6.26 系. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を (\mathcal{B}, μ) 可積分関数とする。

$$\int_A f \mu = \int_A g \mu \quad \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

6.27 演習問題. 系 6.26 を示せ。

7 有限加法的測度とそれが誘導する外測度

区間の長さを有限加法的測度としてとらえて議論を行う。外面積の考えを拡張して外測度を定式化しさらにその持つ性質を公理化して測度の構成へとつなげる。

記号

記号 \mathcal{I} は左半開区間の全体に空集合 \emptyset を付加した集合族を表す。ここで左半開区間とは \mathbb{R} の部分集合で $(a, b]$, 但し $a, b \in \mathbb{R}$ は $a < b$ をみたく、と書けるものをいう。

7.1 定義. 互いに共通部を持たない部分集合からなる族を非交叉族(disjoint family) という。

7.2 補題. (i) $\emptyset \in \mathcal{I}$. $A, B \in \mathcal{I}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{I}$ である。

(ii) $A, B \in \mathcal{I}$, $B \subset A$, $A \neq B$ ならば有限な非交叉族 $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}$ で $I_k \neq \emptyset \forall k = 1, \dots, n$ かつ $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n I_k$ をみたくものが存在する。

証明. (i) 左半開区間どうしの共通部は左半開区間であるかまたは \emptyset である。

(ii) $B = \emptyset$ の場合は非交叉族として A だけからできるものをとればよい。そこで $a < b$, $B = (a, b]$ としよう。その補集合は $(-\infty, a]$ と $(b, +\infty)$ の二つの部分からなる。従って求める非交叉族はこれらと左半開区間 A との共通部で空でないものから構成される。 \square

約束

\mathbb{R}^d の部分集合の族 \mathcal{C} が指定されたとき \mathcal{C} に属する集合を \mathcal{C} -集合とよぶ。

たとえば、 \mathbb{R} の部分集合については \mathcal{I} -集合とは左半開区間あるいは \emptyset のことである。

7.3 定義. A を \mathbb{R}^d の空でない部分集合とする。 A の分割(partition) とは \mathbb{R}^d の空でない部分集合からなる非交叉族 Δ であって $\bigcup_{J \in \Delta} J = A$ を満たすものをいう。特に部分集合の族 \mathcal{C} が指定されている場合 \mathcal{C} -集合から構成されているものを \mathcal{C} -分割という。

7.4 補題. Δ を空でない \mathcal{I} -集合からなる有限な非交叉族とし $A \in \mathcal{I}$ とする。

(i) $\bigcup_{J \in \Delta} J \subset A$, $\bigcup_{J \in \Delta} J \neq A$ なら $A \setminus (\bigcup_{J \in \Delta} J)$ の有限な \mathcal{I} -分割が存在する。

(ii) $\bigcup_{J \in \Delta} J \cup A$ の有限な \mathcal{I} -分割 Λ であって $\Delta \subset \Lambda$ を満たすものが存在する。

証明. (i) 数学的帰納法を使う。まず Δ がひとつの集合 B からできているときを考える。仮定より $B \in \mathcal{I}$ である。従って補題 7.2(ii) により $A \setminus B$ の有限な \mathcal{I} -分割が存在する。すなわち $\#\Delta = 1$ のとき (i) は成り立つ。

$k \in \mathbb{N}$ かつ $\#\Delta \leq k$ のとき (i) が成り立つと仮定する。

そこで $\#\Delta = k + 1$ とし、族 Δ からひとつ集合 B を取り去る。すると $\#(\Delta \setminus \{B\}) = k$ なので $A \setminus (\bigcup_{J \in \Delta: J \neq B} J)$ の有限な \mathcal{I} -分割 Φ が存在する。 B に含まれるか否かで分類する。

$$\{I \in \Phi : I \cap B = I\}, \Phi_0 := \{I \in \Phi : I \cap B \neq I\}.$$

各 $I \in \Phi_0$ に対して $I \cap B \in \mathcal{I}$, $I \cap B \subset I$, $I \cap B \neq I$ なので補題 7.2(ii) により $I \setminus (I \cap B)$ の有限な \mathcal{I} -分割 $\Lambda(I)$ が存在する。これらを集めたもの $\Lambda := \bigcup_{I \in \Phi_0} \Lambda(I)$ が求める有限な \mathcal{I} -分割である。

(ii) $A \subset \bigcup_{J \in \Delta} J$ なら Δ 自身が求める有限な \mathcal{I} -分割であり、 $A \neq \emptyset$ かつ $J \cap A = \emptyset \forall J \in \Delta$ なら $\Lambda := \Delta \cup \{A\}$ が求めるものである。そうでない場合は $\Delta_0 := \{J \in \Delta : J \cap A \neq \emptyset\}$ とおき (i) を $\{J \cap A; J \in \Delta_0\}$ と A の組に適用することができる。従って

$$A \setminus \bigcup_{J \in \Delta_0} (J \cap A) \text{ の有限な } \mathcal{I}\text{-分割 } \Lambda_0 \text{ が存在する。}$$

これと既存の非交叉族 Δ をあわせたもの $\Lambda := \Lambda_0 \cup \Delta$ が求める有限な \mathcal{I} -分割である。 \square

7.5 系. $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{I}$ とする。 $\bigcup_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ なら $\bigcup_{i=1}^n C_i$ の有限な \mathcal{I} -分割 Δ であって $\Delta = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Delta : J \subset C_i\}$ を満たすものが存在する。

証明. $n = 1$ のときは C_1 のみからなる族 $\{C_1\}$ が求めるものである。あとは補題 7.4(ii) を随時適用して n に関する帰納法により証明できる。その実行は演習問題とする。 \square

7.6 演習問題. 系 7.5 を示せ。

補題 7.4 および系 7.5 は集合族 \mathcal{I} に対して補題 7.2 の結論 (i), (ii) が成り立つという事実にのみ基づいて証明されている。そこで一般の集合族 \mathcal{C} について公理化を行う。

補題 7.2 の公理化

- (i) $\emptyset \in \mathcal{C}$. $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.
- (ii) $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C}, B \subset A, A \neq B \Rightarrow A \setminus B$ の有限な \mathcal{C} -分割が存在する。

約束

いちいち断るのも煩わしいので、これから先は A が空集合である場合その分割とは空な族のことと理解する。

次に面積などの持つ性質を公理化する。

7.7 定義. \mathcal{C} を \mathbb{R}^d の部分集合の族、 m を関数 $\mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする。それが次の条件を満たすとき、 (\mathcal{C}, m) は \mathbb{R}^d 上の有限加法的測度 (finitely additive measure) であるという。

- (i) \mathcal{C} に対して補題 7.2 の公理化が成り立つ。
- (ii) $m(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{C}, m(\emptyset) = 0$.
- (iii) $A \in \mathcal{C}$ とその有限な \mathcal{C} -分割 Δ に対して $m(A) = \sum_{J \in \Delta} m(J)$.

性質 (iii) を有限加法性 (finite additivity) という。(iii) が任意の可算無限な \mathcal{C} -分割についても成り立つとき m は σ -加法的 (σ -additive) であるという。

7.8 演習問題. \mathbb{R}^d 上の測度 (\mathcal{B}, μ) は σ -加法的な有限加法的測度であることを確認せよ。

逆に有限加法的測度 (\mathcal{C}, m) についてその定義域が σ -加法族でありかつ σ -加法的ならそれは測度となる。

7.9 例. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を非減少関数とする。このとき

$$\mathcal{I} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, J \mapsto v(\sup J) - v(\inf J)$$

は \mathbb{R} 上の有限加法的測度である。但し空集合 \emptyset に対しては値 0 を割り当てる。

証明. 左半開区間 $(a, b]$ の有限な \mathcal{I} -分割は次のように表現できる。

$$(c_i, c_{i+1}] \quad i = 1, 2, \dots, n. \text{ 但し } a = c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = b$$

$v(b) - v(a) = \sum_{i=1}^n \{v(c_{i+1}) - v(c_i)\}$ であるから有限加法性が成り立つ。 \square

7.10 定義. 例 7.9 で述べた有限加法的測度を非減少関数 v が誘導する有限加法的測度という。

記号

非減少関数 v が誘導する \mathbb{R} 上の有限加法的測度を (\mathcal{I}, dv) と表す。

前提

以下 (\mathcal{C}, m) を \mathbb{R}^d 上の有限加法的測度とする。

7.11 補題. A_1, \dots, A_n および B_1, \dots, B_l はそれぞれ \mathcal{C} 集合からなり互いに共通部を持たないとする。このとき $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^l B_i$ であるなら $\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^l m(B_i)$ が成り立つ。

証明. $m(\emptyset) = 0$ であるから $A_i \neq \emptyset \forall i$ かつ $B_i \neq \emptyset \forall i$ と仮定しても差し支えない。そこで

$$\Delta := \{A_i \cap B_j; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l \text{ ただし } A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$$

という集合族を導入する。各 $J \in \Delta$ は A_1, \dots, A_n のどれかに含まれ、しかもそのような番号はただ一つである。よって

$$\sum_{J \in \Delta} m(J) = \sum_{i=1}^n \sum_{J \in \Delta: J \subset A_i} m(J)$$

ここで $\{J \in \Delta: J \subset A_i\}$ は A_i の有限な \mathcal{C} -分割であるから m の有限加法性により

$$\sum_{J \in \Delta: J \subset A_i} m(J) = m(A_i)$$

が各 i に対して成り立つ。従って

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{J \in \Delta} m(J) = \sum_{i=1}^l m(B_i)$$

である。2 番目の等号は同様の推論が B_1, \dots, B_l についても成り立つことによる。 \square

7.12 補題. Δ を空でない \mathcal{C} -集合からなる有限な非交叉族、 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ とする。

- (i) $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ なら $m(B) \leq m(A)$ が成り立つ。
- (ii) $A \in \mathcal{C}$, $\bigcup_{J \in \Delta} J \subset A$ なら $\sum_{J \in \Delta} m(J) \leq m(A)$ が成り立つ。
- (iii) $B \in \mathcal{C}$, $B \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ なら $m(B) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$ が成り立つ。
- (iv) $\bigcup_{J \in \Delta} J \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ なら $\sum_{J \in \Delta} m(J) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$ が成り立つ。

証明. (i) & (ii) 補題 7.4(i) によれば $A \setminus (\bigcup_{J \in \Delta} J)$ の有限な \mathcal{C} -分割 Λ が存在する。従って

$$\sum_{J \in \Delta} m(J) \leq \sum_{J \in \Delta} m(J) + \sum_{I \in \Lambda} m(I) = m(A)$$

が m の非負性と有限加法性により導かれる。特に $\Delta = \{B\}$ の場合が (i) である。

(iii) 系 7.5 によれば $\bigcup_{i=1}^n C_i$ の有限な \mathcal{C} -分割 Λ であって次を満たすものが存在する。

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Lambda : J \subset C_i\}$$

$\{J \in \Lambda : J \cap B \neq \emptyset\}$ は B の有限 \mathcal{C} 分割であるから m の有限加法性により

$$m(B) = \sum_{J \in \Lambda} m(J) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{J \in \Lambda: J \subset C_i} m(J)$$

(ダブルカウント分だけ右辺が大きい) 各 i に対して (ii) を使うと

$$\sum_{J \in \Lambda: J \subset C_i} m(J) \leq m(C_i)$$

故に求める不等式が得られる。

(iv) $J \in \Delta$ とする。 $J \cap C_i$ $i = 1, 2, \dots, n$ は J の有限な \mathcal{C} -被覆であるから (iii) により

$$m(J) \leq \sum_{i=1}^n m(J \cap C_i).$$

$i = 1, 2, \dots, n$ とする。 $J \cap C_i$ $J \in \Delta$ は \mathcal{C} -集合からなる有限な非交叉族であるから (ii) により

$$\sum_{J \in \Delta} m(J \cap C_i) = \sum_{J \in \Delta: J \cap C_i \neq \emptyset} m(J \cap C_i) \leq m(C_i).$$

従って 2 重和の順序交換 $\sum_{J \in \Delta} \sum_{i=1}^n \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{J \in \Delta} \dots$ により結論を得る。 \square

7.13 定義. \mathbb{R}^d の部分集合 A に対して次の量を A の有限加法的測度 m が誘導する外測度 (outer measure) という。

$$\gamma(m; A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) ; C_n \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}.$$

但し $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を満たす \mathcal{C} -集合列 C_n が存在しないときは $\gamma(m; A) = +\infty$ と約束する。

記号

\mathbb{R}^d の部分集合全体の族を $\text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ という記号で表す。

関数 $\gamma(m; \cdot) : \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の性質を調べる。

7.14 定義. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を満たす \mathcal{C} -集合列 C_n を集合 A の可算 \mathcal{C} -被覆(covering) と呼ぶ。

7.15 補題. (i) $\gamma(m; A) \geq 0 \forall A, \gamma(m; \emptyset) = 0$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow \gamma(m; A) \leq \gamma(m; B)$.

(iii) $\gamma(m; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; A_n)$.

(iv) A の有限 \mathcal{C} -被覆 C_1, C_2, \dots, C_n に対して $\gamma(m; A) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$.

(v) $A, B \in \mathcal{C}$ とする。 $B \subset A$ なら $m(B) + \gamma(m; A \setminus B) \leq m(A)$ である。

証明. (i) m の非負値性により $\gamma(m; A) \geq 0$ である。次に $\emptyset \in \mathcal{C}, m(\emptyset) = 0$ であるから $C_n := \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ という可算 \mathcal{C} -被覆により $\gamma(m; \emptyset) = 0$ が実現されることが分かる。

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; A_n) = +\infty$ なら自明なので、そうでない場合を考察する。 $\varepsilon > 0$ とする。各 $n \in \mathbb{N}$ について $\gamma(m; A_n) < +\infty$ なので A_n の可算 \mathcal{C} -被覆 $C_{nk} \ k \in \mathbb{N}$ であって

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \gamma(m; A_n) + \varepsilon/2^n$$

を満たすものが存在する。さて $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であり、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ。集合列 C_{nk} は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ の可算 \mathcal{C} -被覆であるから次の不等式が導かれた。

$$\gamma(m; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; A_n) + \varepsilon.$$

この段階では $\varepsilon > 0$ はまったく任意なので結論を得る。

(v) $A \neq B$ として差し支えない。このとき $A \setminus B$ の有限な \mathcal{C} -分割 Δ が存在する。従って

$$m(B) + \gamma(m; A \setminus B) \leq m(B) + \sum_{I \in \Delta} m(I) = m(A)$$

が (iv) と m の有限加法性により導かれる。 □

7.16 演習問題. (i) 補題 7.15(ii),(iv) を示せ。

(ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であることを示せ。

7.17 補題. \mathcal{C} -集合の列 $C_n \ n \in \mathbb{N}$ に対して次を満たす集合族の列 $\Delta_n \ n \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$\Delta_n \text{ は } \bigcup_{k=1}^n C_k \text{ の有限 } \mathcal{C}\text{-分割、 } \Delta_n \subset \Delta_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

7.18 演習問題. 補題 7.17 を示せ。(補題 7.4(ii) を考慮に入れて帰納法を適用せよ。)

7.19 系. 任意の $A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対して次が成り立つ。

$$\gamma(m; A) = \inf \left\{ \sum_{J \in \Delta} m(J); \Delta \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \right\}.$$

非交叉可算 \mathcal{C} -被覆が存在しないなら右辺は $+\infty$ と約束する。

証明. $C_n \ n \in \mathbb{N}$ を集合 A の可算 \mathcal{C} -被覆とする。それに対し集合族の列 $\Delta_n \ n \in \mathbb{N}$ を補題 7.17 で述べられたものとする。このとき補題 7.12(iv) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J \in \Delta_n} m(J) \leq \sum_{k=1}^n m(C_k)$$

である。さて $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は非交叉な A の可算 \mathcal{C} -被覆である。さらに次が成り立つ。

$$\sum_{J \in \Delta} m(J) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{J \in \Delta_n} m(J) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n m(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k).$$

即ち可算 \mathcal{C} -被覆が存在するなら効率を落さずに非交叉可算 \mathcal{C} -被覆を選ぶことができる。

$$\inf \left\{ \sum_{J \in \Lambda} m(J); \Lambda \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k).$$

$C_n \ n \in \mathbb{N}$ は集合 A の可算 \mathcal{C} -被覆である限り任意なので

$$\inf \left\{ \sum_{J \in \Lambda} m(J); \Lambda \text{ 非交叉な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆} \right\} \leq \gamma(m; A).$$

さて A が可算 \mathcal{C} -被覆をもたない場合は $\gamma(m; A) = +\infty$ なので、不等号は自明に成り立つ。逆向きの不等号の理由付けは演習問題とする。□

7.20 演習問題. 系 7.19 の証明を完成させよ。

8 Carathéodory の外測度と可測集合

この節では補題 7.15 で述べられた有限加法的測度が誘導する外測度の性質 (i), (ii), (iii) を公理化して議論し、それによる測度の構成方法を紹介する。これは単なる一般化ではない。必ずしも有限加法的測度に由来しない外測度も応用上重要だからである。

8.1 定義. $\text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ を定義域にもつ関数 $\theta : \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき、 θ は \mathbb{R}^d 上の Carathéodory 外測度であるという。

- (i) $\theta(A) \geq 0 \ \forall A, \theta(\emptyset) = 0$. 非負性(non-negativity)
- (ii) $A \subset B \Rightarrow \theta(A) \leq \theta(B)$. 単調性(monotonicity)
- (iii) $\theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n)$. 可算劣加法性(countable subadditivity)

前提

以下 θ を \mathbb{R}^d 上の Carathéodory 外測度とする。

8.2 定義. $A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ が Carathéodory 外測度 θ に関して可測(measurable)、略して θ 可測、であるとは次が成り立つことをいう。

$$\theta(B) = \theta(B \cap A) + \theta(B \cap A^c) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

記号

θ 可測な \mathbb{R}^d の部分集合全体の族を $\text{Mble}(\theta)$ とあらわす。

8.3 補題. $A \in \text{Mble}(\theta)$, $B_1 \subset A$, $B_2 \cap A = \emptyset \Rightarrow \theta(B_1 \cup B_2) = \theta(B_1) + \theta(B_2)$.

証明. $(B_1 \cup B_2) \cap A = B_1$, $(B_1 \cup B_2) \cap A^c = B_2$ を使う。 □

8.4 補題. \mathcal{M} を \mathbb{R}^d の部分集合の族とする。次が成り立つなら \mathcal{M} は σ -加法族である。

- (i) $\emptyset \in \mathcal{M}$. (ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$. (iii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.
- (iv) $A_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset \quad n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

8.5 演習問題. 補題 8.4 を示せ。

8.6 補題. $\text{Mble}(\theta)$ は σ -加法族であり、 θ は $\text{Mble}(\theta)$ 上で σ -加法的である。

証明. $B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ とする。 $B \cap \emptyset = \emptyset$, $B \cap \emptyset^c = B$, $\theta(\emptyset) = 0$ であるから

$$\theta(B \cap \emptyset) + \theta(B \cap \emptyset^c) = \theta(\emptyset) + \theta(B) = \theta(B) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

従って $\emptyset \in \text{Mble}(\theta)$ である。

$A \in \text{Mble}(\theta)$ とする。 $(A^c)^c = A$ であるから

$$\theta(B \cap A^c) + \theta(B \cap (A^c)^c) = \theta(B \cap A) + \theta(B \cap A^c) = \theta(B) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

従って $A^c \in \text{Mble}(\theta)$ である。

$A_1, A_2 \in \text{Mble}(\theta)$ とする。次の関係に着目する。

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \{B \cap (A_1 \cup A_2)\} \cap A_1 &= B \cap A_1, \quad \{B \cap (A_1 \cup A_2)\} \cap (A_1)^c = B \cap (A_1)^c \cap A_2, \\ B \cap (A_1 \cup A_2)^c &= B \cap (A_1)^c \cap (A_2)^c. \end{aligned}$$

まず A_1 の θ -可測性を適用し次に A_2 の θ -可測性、再び A_1 の θ -可測性を使うと

$$\begin{aligned} &\theta(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \theta(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\ &= \theta(B \cap A_1) + \theta(B \cap (A_1)^c \cap A_2) + \theta(B \cap (A_1)^c \cap (A_2)^c) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d). \\ &= \theta(B \cap A_1) + \theta(B \cap (A_1)^c) = \theta(B) \end{aligned}$$

従って $A_1 \cup A_2 \in \text{Mble}(\theta)$ である。

$A_n \in \text{Mble}(\theta) \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset \ n \neq m$ とする。

$$B \cap A_{n+1} \subset A_{n+1}, B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cap A_{n+1} = \emptyset$$

であるから A_{n+1} の θ -可測性に着目して補題 8.3 を使うと次が得られる。

$$\theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right)) = \theta(B \cap A_{n+1}) + \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

従って帰納法を適用し、その後 θ の単調性を使うと

$$\sum_{k=1}^n \theta(B \cap A_k) = \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) \leq \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

各項は非負値なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta(B \cap A_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) \leq \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)).$$

他方、 θ は可算劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立している。よって

$$(8.8) \quad \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(B \cap A_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

さてすでに証明されたことにより $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \text{Mble}(\theta)$ である。従って各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\theta(B) = \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) + \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)^c) \geq \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)) + \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c).$$

ここで不等号は θ の単調性による。(8.8) をつかって

$$\theta(B) \geq \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)) + \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

θ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立する。したがって

$$\theta(B) = \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)) + \theta(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$$

であるから $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \text{Mble}(\theta)$ が導かれた。

以上で集合族 $\text{Mble}(\theta)$ について補題 8.4 の前提条件がすべて確かめられたことになるので、 $\text{Mble}(\theta)$ は σ -加法族である。また (8.8) において $B = \mathbb{R}^d$ の場合が θ の $\text{Mble}(\theta)$ 上における σ -加法性にほかならない。□

8.9 演習問題. (8.7) を確認せよ。

補題 8.6 の結論を言い換えてみよう。

8.10 定理. 外測度 θ の $\text{Mble}(\theta)$ 上への制限は \mathbb{R}^d 上の測度である。

8.11 定義. $A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ が θ 零集合 (θ -null set) であるとは $\theta(A) = 0$ であることをいう。

記号

θ 零集合全体の族を $\text{Null}(\theta)$ と書く。

8.12 定理. (i) $\emptyset \in \text{Null}(\theta)$ かつ $\text{Null}(\theta) \subset \text{Mble}(\theta)$ である。

(ii) $A_n \in \text{Null}(\theta) \forall n \in \mathbb{N}$ かつ $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow B \in \text{Null}(\theta)$

証明. (i) $\emptyset \in \text{Null}(\theta)$ は $\theta(\emptyset) = 0$ より明らか。 $A \in \text{Null}(\theta), B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ とする。 $B \cap A \subset A, B \cap A^c \subset B, \theta(A) = 0$ であるから θ の劣加法性と単調性により

$$\theta(B) \leq \theta(B \cap A) + \theta(B \cap A^c) \leq \theta(A) + \theta(B) = \theta(B)$$

$B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ は任意であるからこれは $A \in \text{Mble}(\theta)$ を意味する。

(ii) $A_n \in \text{Null}(\theta) \forall n \in \mathbb{N}$ かつ $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする。 θ の単調性と可算劣加法性により

$$0 \leq \theta(B) \leq \theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n) = 0$$

であるから $B \in \text{Null}(\theta)$ が従う。 □

ここで有限加法的測度が誘導する外測度についての議論に戻る。

前提

以下 (\mathcal{C}, m) を \mathbb{R}^d 上の有限加法的測度とする。

記号

$\text{Mble}(\gamma(m; \cdot))$ を単に $\text{Mble}(m)$ と書き $\gamma(m; \cdot)$ の $\text{Mble}(m)$ への制限を m^* と書く。また $\text{Null}(\gamma(m; \cdot))$ を単に $\text{Null}(m)$ と書くことにする。

このとき $(\text{Mble}(m), m^*)$ は \mathbb{R}^d 上の測度である。これと (\mathcal{C}, m) との関係を探る。

8.13 定理. すべての \mathcal{C} -集合は $\gamma(m; \cdot)$ -可測である。すなわち $\mathcal{C} \subset \text{Mble}(m)$ である。

証明. $A \in \mathcal{C}$ とする。 $B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対しその可算 \mathcal{C} -被覆が存在するならその一つを $C_n, n \in \mathbb{N}$ とする。 $C_n \cap A, n \in \mathbb{N}$ は集合 $B \cap A$ の可算 \mathcal{C} -被覆であるから

$$\gamma(m; B \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n \cap A).$$

他方、外測度 $\gamma(m; \cdot)$ の単調性と可算劣加法性により

$$\gamma(m; B \cap A^c) \leq \gamma(m; \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap A^c)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; C_n \cap A^c).$$

さて $C_n \cap A^c = C_n \setminus (C_n \cap A)$ であるから補題 7.15(v) によると

$$m(C_n \cap A) + \gamma(m; C_n \cap A^c) \leq m(C_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ。従って以上を組み合わせると

$$\gamma(m; B \cap A) + \gamma(m; B \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n).$$

これがあらゆる B の可算 \mathcal{C} -被覆について満たされる。よって

$$\gamma(m; B \cap A) + \gamma(m; B \cap A^c) \leq \gamma(m; B) \quad \forall B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d).$$

さて B が可算 \mathcal{C} -被覆をもたない場合は $\gamma(m; B) = +\infty$ なので、不等号は自明に成り立つ。 $\gamma(m; \cdot)$ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立し $A \in \text{Mble}(m)$ が導かれた。□

8.14 演習問題. $A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対して次の同値性が成り立つことを示せ。

$$A \text{ は } m^* \text{ 零集合} \Leftrightarrow A \in \text{Null}(m)$$

また測度 $(\text{Mble}(m), m^*)$ は完備であることを示せ。

8.15 定理. 以下はすべて同値である。

(i) $\gamma(m; A) = m(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}.$

(ii) m は σ -加法的

(iii) $A \in \mathcal{C}$ とその可算 \mathcal{C} -被覆 Δ で非交叉族であるものに対して $m(A) \leq \sum_{J \in \Delta} m(J).$

証明. 定理 8.13 により $\mathcal{C} \subset \text{Mble}(m)$ である。従って定理 8.10 により

$$\mathcal{C}\text{-集合からなる可算非交叉族 } \Delta \text{ に対して } \gamma(m; \bigcup_{J \in \Delta} J) = \sum_{J \in \Delta} \gamma(m; J).$$

これは Δ が \mathcal{C} -集合の可算 \mathcal{C} -分割になっている場合も含む。よって論理図式 (i) \Rightarrow (ii) が成り立つ。次に A および Δ を (iii) の前提にあるようなものとする。 $\{J \cap A; J \in \Delta, J \cap A \neq \emptyset\}$ は $A \in \mathcal{C}$ の可算 \mathcal{C} -分割であるから、 m が σ -加法的なら

$$m(A) = \sum_{J \in \Delta: J \cap A \neq \emptyset} m(J \cap A) = \sum_{J \in \Delta} m(J \cap A) \leq \sum_{J \in \Delta} m(J).$$

ここで不等号は補題 7.12(i) による。よって論理図式 (ii) \Rightarrow (iii) が成り立つ。系 7.19 によれば (iii) が成り立つなら $m(A) \leq \gamma(m; A) \quad \forall A \in \mathcal{C}.$ 他方、補題 7.15(iv) によれば逆向きの不等号も成り立っている。よって残りの論理図式 (iii) \Rightarrow (i) が導かれた。□

8.16 定義. 有限加法的測度 (\mathcal{C}, m) に対して測度 (\mathcal{B}, μ) が存在して $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mu(A) = m(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}$ が成り立つとき (\mathcal{B}, μ) は有限加法的測度 (\mathcal{C}, m) の測度への拡張という。

m が σ -加法的なら定理 8.13 と定理 8.15 により測度 $(\text{Mble}(m), m^*)$ は (\mathcal{C}, m) の拡張である。その逆も正しいことの確認は演習問題とする。

8.17 演習問題. 測度に拡張可能な有限加法的測度は σ -加法的であることを示せ。

以上は次の形にまとめて表現され Hopf の拡張定理と呼ばれる。

8.18 定理. 有限加法的測度が測度に拡張されるための必要十分条件はそれが σ -加法的なことである。

測度論的構造が別の数学的構造と融合しているとき、それが測度論的性質に反映することが当然期待される。それを引き出すときに、集合族 \mathcal{C} に着目する構造が取り込まれているという状況のもと、次の定理がよく利用される。

8.19 定理. m は σ -加法的であるとする。 $A \in \text{Mble}(m)$ かつ $m^*(A) < +\infty$ なら、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して有限個の \mathcal{C} 集合 C_1, C_2, \dots, C_k が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| 1_A - \sum_{n=1}^k 1_{C_n} \right| m^* < \varepsilon.$$

証明. $\text{Mble}(m)$ 可測集合 A に対してその外測度をもって $m^*(A)$ を決めるというのが定義であった。仮定より外測度 $m^*(A)$ は有限値であるから、 \mathcal{C} 集合列 C_n が存在して次を満たす。

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < m^*(A) + \varepsilon/2.$$

定理 8.15 より $m(C_n) = m^*(C_n)$ である。補題 5.4 を考慮して定義関数を使って表現すると

$$1_A(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} m^* = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{C_n} m^* < \int_{\mathbb{R}^d} 1_A m^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

関数 $1_A, \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}$ はともに m^* 可積分なので定理 4.10 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| 1_A - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \right| m^* = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} - 1_A \right) m^* = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} m^* - \int_{\mathbb{R}^d} 1_A m^* < \frac{\varepsilon}{2}.$$

他方 $\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < +\infty$ であるから、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n} m^* = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{C_n} m^* = \sum_{n=k+1}^{\infty} m(C_n) < \varepsilon/2.$$

定理 4.10 を適用して以上を組み合わせると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| 1_A - \sum_{n=1}^k 1_{C_n} \right| m^* \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| 1_A - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n} \right| m^* + \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n} m^* < \varepsilon.$$

集合 C_1, C_2, \dots, C_k が求めるものである。 □

9 1次元 Lebesgue 測度の存在

この節では 1次元 Lebesgue 測度の存在を示す。

前提

以下 \mathcal{I} は左半開区間の全体に空集合 \emptyset を付加した集合族を表し、 (\mathcal{I}, m) を \mathbb{R} 上の有限加法的測度とする。

9.1 補題. m は条件 $\inf_{\delta>0} m((a, a + \delta]) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$ を満たすとする。このとき左半開区間の列 $(a_n, b_n] \ n \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ に対して次を満たすような正の実数列 δ_n が存在する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

証明. m に対する条件により

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \delta_n > 0 \text{ s.t. } m((b_n, b_n + \delta_n]) < \varepsilon/2^n.$$

有限加法性により $m((a_n, b_n + \delta_n]) = m((a_n, b_n]) + m((b_n, b_n + \delta_n])$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \{m((a_n, b_n]) + \varepsilon/2^n\}.$$

従って $\delta_n \ n \in \mathbb{N}$ が求めるものである。 □

9.2 補題. K を有界な閉区間、 $J_n \ n \in \mathbb{N}$ を开区間の列とする。 $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ なら $K \subset \bigcup_{n=1}^k J_n$ を満たすような $k \in \mathbb{N}$ が存在する。

9.3 演習問題. 補題 9.2 を示せ。

9.4 補題. 条件 $\inf_{\delta>0} m((a, a + \delta]) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$ が成り立てば、 (\mathcal{I}, m) は σ -加法的である。

証明. 定理 8.15 によれば、 $A \in \mathcal{I}$ とその可算 \mathcal{I} 被覆 Δ に対して

$$m(A) \leq \sum_{J \in \Delta} m(J)$$

が成り立つことを示せばよい。記号の複雑化を避けるために $A = (0, 1]$ として話を進める。また可算 \mathcal{I} 被覆 Δ は左半开区間の列 $(a_n, b_n] \ n \in \mathbb{N}$ で表されるとしよう。 $\varepsilon > 0$ とする。補題 9.1 の前提は満たされるので、次のような正の実数列 δ_n を見つけることができる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

他方、 $m((0, \delta]) < \varepsilon$ を満たすような $\delta > 0$ も存在する。 $(a_n, b_n] \subset (a_n, b_n + \delta_n)$ であるから

$$[\delta, 1] \subset (0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n + \delta_n).$$

補題 9.2 によれば、次を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$[\delta, 1] \subset \bigcup_{n=1}^k (a_n, b_n + \delta_n).$$

従ってこのような k に対して

$$(0, 1] = (0, \delta) \cup [\delta, 1] \subset (0, \delta) \cup \bigcup_{n=1}^k (a_n, b_n + \delta_n).$$

右辺は左半開区間の有限合併であるから、補題 7.12(iii) により

$$m((0, 1]) \leq m((0, \delta]) + \sum_{n=1}^k m((a_n, b_n + \delta_n]).$$

各項は非負値なので右辺は次でおさえられる。

$$m((0, \delta]) + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n + \delta_n]).$$

従って

$$m((0, 1]) \leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n]).$$

ε は $\varepsilon > 0$ である限り任意なので求める不等式を得た。 □

付帯条件を付けると補題 9.4 の逆も正しい。

9.5 演習問題. (\mathcal{I}, m) は条件 $\forall a \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ s.t. $m((a, a + \delta]) < +\infty$ を満たすとする。このとき (\mathcal{I}, m) が σ -加法的なら $\inf_{\delta > 0} m((a, a + \delta]) = 0 \forall a \in \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ。

ここで \mathbb{R} 上の有限加法的測度で重要な例を思い出そう。

再確認

非減少関数 $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の誘導する \mathbb{R} 上の有限加法的測度 dv とは

$$\mathcal{I} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, J \mapsto v(\sup J) - v(\inf J).$$

但し空集合 \emptyset に対しては値 0 を割り当てる。

$$\gamma(dv; A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (v(b_n) - v(a_n)); A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\} \quad A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}).$$

$\text{Mble}(\gamma(dv; \cdot))$ を単に $\text{Mble}(dv)$ と書く。

9.6 定理. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき

$$(a, b] \in \text{Mble}(dv) \text{ かつ } \gamma(dv; (a, b]) = v(b) - v(a) \quad \forall a < \forall b.$$

即ち v の誘導する有限加法的測度 dv は測度に拡張される。

証明. 定理 8.18 によれば、 v の誘導する有限加法的測度の σ -加法的性を確かめればよい。補題 9.4 に述べられている条件は次のように表せる。

$$\inf_{\delta > 0} \{v(a + \delta) - v(a)\} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

これは v の右連続性に他ならない。 □

9.7 定義. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき \mathbb{R} 上の測度

$$dv^* : \text{Mble}(dv) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \gamma(dv; A)$$

を v の誘導する *Lebesgue-Stieltjes 測度*、また $\gamma(dv; \cdot)$ を *Lebesgue-Stieltjes 外測度* と呼ぶ。

9.8 例. $c, h \in \mathbb{R}, h > 0$ に対して次の関数 $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を導入する。

$$v(x) := \begin{cases} 0 & x < c \\ h & x \geq c \end{cases}$$

このとき右連続な非減少関数 v が誘導する *Lebesgue-Stieltjes 測度* は次をみたく。

$$dv^*((a, b]) = v(b) - v(a) = \begin{cases} 0 & b < c \\ h & a < c \leq b \\ 0 & c \leq a \end{cases} = \begin{cases} h & c \in (a, b] \\ 0 & c \notin (a, b] \end{cases}$$

$h = 1$ の場合、上は (点 c に質量を持つ) *Dirac 測度* と呼ばれるものである。測度 dv^* について少し調べてみる。まず $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c - n, c + n]$ より補題 3.10(i) を適用して

$$dv^*(\mathbb{R}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} dv^*((c - n, c + n]) = h$$

が分かる。次に $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (c - 1/n, c] \in \text{Mble}(dv)$ である。補題 3.10(ii) を適用して

$$dv^*(\{c\}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} dv^*((c - 1/n, c]) = h \text{ かつ } dv^*(\mathbb{R} \setminus \{c\}) = dv^*(\mathbb{R}) - dv^*(\{c\}) = 0$$

を得る。ここで $A \subset \mathbb{R}$ かつ $c \in A$ とする。補題 7.15(ii) を適用して

$$h = dv^*(\{c\}) = \gamma(dv; \{c\}) \leq \gamma(dv; A) \leq \gamma(dv; \mathbb{R}) = dv^*(\mathbb{R}) = h$$

他方 $A \subset \mathbb{R}$ かつ $c \notin A$ ならば $\emptyset \subset A \subset \mathbb{R} \setminus \{c\}$ であるから

$$0 = dv^*(\emptyset) = \gamma(dv; \emptyset) \leq \gamma(dv; A) \leq \gamma(dv; \mathbb{R} \setminus \{c\}) = dv^*(\mathbb{R} \setminus \{c\}) = 0$$

以上をまとめると任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma(dv; A) = \begin{cases} h & c \in A \\ 0 & c \notin A \end{cases}$$

また上はすべての $A \subset \mathbb{R}$ が $\text{Mble}(dv)$ 可測であることを意味する。実際 $B \subset \mathbb{R}$ かつ $c \notin B$ ならば $c \notin B \cap A$ かつ $c \notin B \cap A^c$ であるから

$$\gamma(dv; B) = 0 = 0 + 0 = \gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c)$$

が成り立つ。他方 $B \subset \mathbb{R}$ かつ $c \in B$ ならば「 $c \in B \cap A$ かつ $c \notin B \cap A^c$ 」または「 $c \notin B \cap A$ かつ $c \in B \cap A^c$ 」であるからいずれにしても

$$\gamma(dv; B) = 1 = 1 + 0 \text{ (あるいは } 0 + 1) = \gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c)$$

が成り立つ。よって Carathéodory 外測度に関する可測性の定義との照合ができた。従って任意の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\text{Mble}(dv)$ 可測である。更に $f = f(c)1_{\{c\}}$ dv^* -a.e. であることより

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dv^* = \int_{\mathbb{R}} f(c)1_{\{c\}} \, dv^* = f(c)dv^*(\{c\}) = f(c)h$$

9.9 演習問題. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{a\}$ が dv^* 零集合であることと v が連続であることは同値であることを示せ。

約束

関数 $v : x \mapsto x$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度 (外測度) を 1次元 Lebesgue 測度 (外測度) と呼ぶ。またこのとき $\text{Mble}(dv)$ -集合を Lebesgue 可測集合といい、 σ 加法族 $\text{Mble}(dv)$ に関して可測な関数は Lebesgue 可測関数と呼ぶ。

記号

λ は 1次元 Lebesgue 測度を表す。また $\gamma(\lambda; \cdot)$ で Lebesgue 外測度を $\text{Mble}(\lambda)$ で Lebesgue 可測集合族を表すことにする。

定理 9.6 によりたしかに Lebesgue 測度は存在する。しかし Lebesgue 可測集合の正体が今ひとつはつきりしない。はたして連続関数は可測か？

9.10 補題. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を非減少関数とする。

- (i) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき $(a, b), [a, b], [a, b) \in \text{Mble}(dv)$ である。
- (ii) 任意の連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\text{Mble}(dv)$ -可測である。
- (iii) 任意の \mathbb{R} の閉集合 A に対して $A \in \text{Mble}(dv)$ である。
- (iv) 任意の \mathbb{R} の開集合 A に対して $A \in \text{Mble}(dv)$ である。

証明. (i), (iv) 証明は演習問題とする。

(ii) $x \in \mathbb{R}$ に対して $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$ とおく。 $n \in \mathbb{N}$ とする。関数

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f([nx]/n)$$

について議論する。定理 8.13 により \mathcal{I} 集合は可測であるから次が成り立つ。

$$\text{Image } f_n = \{f(k/n); k \in \mathbb{Z}\}, (f_n)^{-1}\{y\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}: f(k/n)=y} (k/n, (k+1)/n] \in \text{Mble}(dv).$$

Image f_n は可算集合なので補題 2.9 とその後の注意より f_n は $\text{Mble}(dv)$ 可測である。 f は連続なので f_n は f に各点収束する。よって補題 5.1 により f も $\text{Mble}(dv)$ -可測である。

(iii) 補題 8.6 により $\emptyset \in \text{Mble}(dv)$ である。従って A を空でない閉集合として議論を進める。まず各 $x \in \mathbb{R}$ に対して集合 $\{|x - z|; z \in A\}$ は空でなくまた下に有界であることに注意する。さて次の関数が連続であることを示そう。

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \inf\{|x - z|; z \in A\}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $z \in A$ が存在して $|x - z| \leq f(x) + \varepsilon$ を満たす。このとき三角不等式より

$$f(y) \leq |y - z| \leq |y - x| + |x - z| \leq |y - x| + f(x) + \varepsilon$$

従って $f(y) \leq |y - x| + f(x) + \varepsilon$ が成り立つが $\varepsilon > 0$ は任意なので

$$f(y) \leq |y - x| + f(x)$$

x, y の役割は対等なので $f(x) \leq |x - y| + f(y)$ も成り立つ。よって

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

となるので関数 f は連続である。 $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ であることを確かめるのは演習問題とする。(ii) によれば任意の連続関数は $Mble(dv)$ -可測であるから

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \in Mble(dv)$$

であることが導かれた。 □

9.11 注意. 実は Lebesgue 可測でない関数も存在するのであるが、その存在を証明するには選択公理(axiom of choice)が必要である。従って構成的につくられる関数はすべて Lebesgue 可測であるといってよく、通常解析学の範囲で Lebesgue 可測でない関数に遭遇することはないのであるが、個々の関数の可測性はその度ごとに証明しないといけない。

9.12 演習問題. (i) 補題 9.10(i), (iv) を示せ。

(ii) A を空でない \mathbb{R} の閉集合とする。このとき次が成り立つことを示せ。

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \inf\{|x - z|; z \in A\} = 0\}$$

9.13 定義. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、 f を $Mble(dv)$ 可測関数また $A \in Mble(dv)$ とする。 f (あるいは $1_A f$) が Lebesgue-Stieltjes 測度 dv^* に関して可積分であるとき積分

$$\int_{\mathbb{R}} f dv^* \text{ あるいは } \int_A f dv^*$$

を f の v による *Lebesgue-Stieltjes 積分*(Lebesgue-Stieltjes integral) と呼ぶ。

次は内容的に第 5 節で取り上げるべきものであるが、連続関数の可測性など題材がそろっていないのがここに登場する理由である。

9.14 演習問題. 右連続な非減少関数 $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はある $c \in \mathbb{R}$ に対して次を満たすとする。

$$\int_{[0, +\infty)} e^{-cx} dv^*(x) < +\infty.$$

(i) 各 $t > c$ に対して $\int_{[0, +\infty)} e^{-tx} dv^*(x) < +\infty$ であることを示せ。

(ii) $[c, +\infty)$ 上の関数 $t \mapsto \int_{[0, +\infty)} e^{-tx} dv^*(x)$ は連続であることを示せ。

(iii) $\int_{[0, +\infty)} e^{-tx} dv^*(x) = v(0) - \sup_{\delta > 0} v(-\delta) + \int_{(0, +\infty)} e^{-tx} dv^*(x)$ を示せ。

(iv) 極限 $t \rightarrow +\infty$ において $\int_{[0, +\infty)} e^{-tx} dv^*(x)$ は収束することを示せ。

つぎの補題 9.16 および定理 9.17 は定理 6.13 の協力をうけて関数空間論において決定的な役割を果たす。関数解析的な取り扱いでよく登場する空間を導入しておこう。

9.15 定義. 連続関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の台(support) という。台が有界な連続関数全体の集合を $C_0(\mathbb{R}^d)$ という記号で表すことが多い。

9.16 補題. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、 $A \in \text{Mble}(dv)$ とする。 $dv^*(A) < +\infty$ なら、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対してその台が有界な連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |1_A - f| dv^* < \varepsilon.$$

証明. 関数 v は右連続であるから、定理 9.6 が適用できる。 $\text{Mble}(dv)$ 可測集合 A に対してその外測度をもって $dv^*(A)$ を決めるとというのが定義であった。仮定より外測度は有限であるから、定理 8.19 により有限個の区間 $(a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots, k$ が存在して次を満たす。

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} \left| 1_A - \sum_{n=1}^k 1_{(a_n, b_n]} \right| dv^* < \varepsilon/2.$$

関数 v は右連続であったのである $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して

$$\sum_{n=1}^k (v(a_n + \delta) - v(a_n) + v(b_n + \delta) - v(b_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

必要なら δ を取り替えることにより以下も満たすようにできる。

$$a_n + \delta < b_n \quad \forall n = 1, 2, \dots, k.$$

ここで次の連続関数を導入する。

$$f_n(x) := \min\{\max\{x - a_n, 0\}/\delta, \max\{b_n + \delta - x, 0\}/\delta, 1\} \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

連続関数の可測性は補題 9.10 で保証されている。定理 4.10, 補題 3.4(ii) と定理 9.6 により

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^k 1_{(a_n, b_n]} - \sum_{n=1}^k f_n \right| dv^* \\ & \leq \sum_{n=1}^k \int_{\mathbb{R}} |1_{(a_n, b_n]} - f_n| dv^* \leq \sum_{n=1}^k \int_{\mathbb{R}} (1_{(a_n, a_n + \delta]} + 1_{(b_n, b_n + \delta]}) dv^* \\ & = \sum_{n=1}^k (v(a_n + \delta) - v(a_n) + v(b_n + \delta) - v(b_n)) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

従って定理 4.10 を適用して (*) と組み合わせると

$$\int_{\mathbb{R}} \left| 1_A - \sum_{n=1}^k f_n \right| dv^* \leq \int_{\mathbb{R}} \left| 1_A - \sum_{n=1}^k 1_{(a_n, b_n]} \right| dv^* + \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^k 1_{(a_n, b_n]} - \sum_{n=1}^k f_n \right| dv^* < \varepsilon.$$

関数 $\sum_{n=1}^k f_n$ は区間 $[\min a_n, \max b_n + \delta]$ の外で値 0 なので、これが求めるものである。□

次の定理は、通常 L^1 空間における連続関数の稠密性というキーワードで引用される。

9.17 定理. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\text{Mble}(dv)$ 可測かつ dv^* 可積分とする。任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対してその台が有界な連続関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| dv^* < \varepsilon.$$

証明. 補題 3.17 によれば、非負値 $\text{Mble}(dv)$ 単関数列 f_n が存在して

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

定理 3.18 を適用すると

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n dv^* = \int_{\mathbb{R}} \max\{f, 0\} dv^* \leq \int_{\mathbb{R}} |f| dv^* < +\infty.$$

よってある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} \max\{f, 0\} dv^* < \int_{\mathbb{R}} f_k dv^* + \varepsilon/4.$$

$h := f_k$ とおくとこれは dv^* 可積分な $\text{Mble}(dv)$ 単関数で

$$0 \leq h \leq \max\{f, 0\}, \quad \int_{\mathbb{R}} (\max\{f, 0\} - h) dv^* = \int_{\mathbb{R}} \max\{f, 0\} dv^* - \int_{\mathbb{R}} h dv^* < \varepsilon/4.$$

次の不等式から $z \in \text{Image } h$ かつ $z > 0$ なら $dv^*(h^{-1}\{z\}) < +\infty$ であることがわかる。

$$z dv^*(h^{-1}\{z\}) \leq \int_{\mathbb{R}} h dv^* < +\infty.$$

$\text{Image } h$ の要素の個数は有限であるが、それを N とおく。補題 9.16 により $z \in \text{Image } h, z > 0$ に対してその台が有界な連続関数 $g_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |1_{h^{-1}\{z\}} - g_z| dv^* < \frac{\varepsilon}{4Nz}.$$

関数 $g_+ := \sum_{z \in \text{Image } h, z > 0} z g_z$ は連続かつその台は有界である。定理 4.10 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{z \in \text{Image } h, z > 0} z 1_{h^{-1}\{z\}} - \sum_{z \in \text{Image } h, z > 0} z g_z \right| dv^* \leq \sum_{z \in \text{Image } h, z > 0} z \int_{\mathbb{R}} |1_{h^{-1}\{z\}} - g_z| dv^* < \frac{\varepsilon}{4}.$$

上の左辺は $\int_{\mathbb{R}} |h - g_+| dv^*$ に等しいので

$$\int_{\mathbb{R}} |\max\{f, 0\} - g_+| dv^* \leq \int_{\mathbb{R}} (\max\{f, 0\} - h) dv^* + \int_{\mathbb{R}} |h - g_+| dv^* < \varepsilon/2.$$

関数 $-f$ に対して以上の議論が適用できる。よって連続関数 $g_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって

$$\int_{\mathbb{R}} |\max\{-f, 0\} - g_-| dv^* < \varepsilon/2$$

を満たしかつその台が有界なものが存在する。関数 $g := g_+ - g_-$ が求めるものである。 \square

10 1次元 Lebesgue 積分

この節では1次元区間上の連続関数には必ず原始関数が存在することおよび微積分の基本定理を証明する。それをもとにして応用の鍵となる事実をいくつか紹介する。

約束

$f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を Lebesgue 可測関数とする。 f が Lebesgue 可積分 (Lebesgue integrable) とは Lebesgue 測度 λ に関して可積分であることをいう。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f \lambda \text{ あるいは } \int_A f \lambda \text{ (ただし } A \text{ は Lebesgue 可測集合)}$$

を f の Lebesgue 積分 (Lebesgue integral) と呼ぶ。

次の定理の応用範囲は、単に具体的にできる積分の評価にとどまらない。

10.1 定理. $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ かつ関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ Lebesgue 可積分とする。

(i) 関数 $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{(a,x]} f \lambda$ は f の原始関数である。原始関数の存在

(ii) 関数 f の原始関数の一つを $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ とすると極限 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ が存在し $\int_{(a,b)} f \lambda = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ が成り立つ。微積分の基本定理

証明. (i) $c \in (a, b)$ における微分可能性を議論しよう。任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。連続性により $\exists \delta > 0$ s.t. $|y - c| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(c)| < \varepsilon$ となる。さて $c \leq x < b$ のとき

$$\int_{(a,x]} f \lambda - \int_{(a,c]} f \lambda - f(c)(x - c) = \int_{(c,x]} (f - f(c)) \lambda$$

より、定理 4.7(ii) を適用して $c \leq x < \min\{c + \delta, b\}$ なら

$$\left| \int_{(a,x]} f \lambda - \int_{(a,c]} f \lambda - f(c)(x - c) \right| \leq \int_{(c,x]} |f - f(c)| \lambda \leq \varepsilon |x - c|$$

が成り立つことを得る。 $\varepsilon |x - c|$ で抑えるという評価は $\max\{c - \delta, a\} < x \leq c$ であっても有効である。よって $x \mapsto \int_{(a,x]} f \lambda$ は c において微分可能であり、微分係数は $f(c)$ に等しい。

(ii) 开区間上での原始関数は定数の違いをのぞいて一意であるから、 $K \in \mathbb{R}$ が存在して

$$F(x) = \int_{(a,x]} f \lambda + K \quad \forall x \in (a, b)$$

が成り立つ。以下 a, b ともに有限と仮定するが、 $a = -\infty$ あるいは $b = +\infty$ であっても適宜修正を施せばよいので、その実行は演習問題とする。定理 4.7(ii) より

$$(*) \quad |F(x) - K| = \left| \int_{(a,x]} f \lambda \right| \leq \int_{(a,x]} |f| \lambda$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} 1_{(a, a+1/n]}(y) |f(y)| = 0 \forall y$ に着目する。優関数を $1_{(a,b)} |f|$ と選らぶと関数列 $1_{(a, a+1/n]} |f|$ に Lebesgue の優収束定理が適用できるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a, a+1/n]} |f| \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{(a, a+1/n]} |f| \lambda = 0$$

従って与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_{(a, a+1/n]} |f| \lambda < \varepsilon$ が成り立つ。(★) より

$$|F(x) - K| \leq \int_{(a, x]} |f| \lambda \leq \int_{(a, a+1/n]} |f| \lambda < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a + 1/n]$$

$\varepsilon > 0$ は任意なのでこれは $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = K$ を意味する。同様に

$$\left| F(x) - K - \int_{(a,b)} f \lambda \right| = \left| \int_{(a,b)} f \lambda - \int_{(a,x]} f \lambda \right| = \left| \int_{(x,b)} f \lambda \right| \leq \int_{(x,b)} |f| \lambda$$

と評価して Lebesgue の優収束定理を適用すると $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = K + \int_{(a,b)} f \lambda$ が導ける。□

記号

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ かつ関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ Lebesgue 可積分とする。関数 f の原始関数の一つを F とするとき $\lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ を慣例に従って $F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$ と略記する。もちろん $\int_{(a,b)} f \lambda = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$ が成り立つ。

10.2 演習問題. (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を Lebesgue 可測関数であって区間 $(-\pi, \pi)$ 上で Lebesgue 可積分なものとする。 $0 \leq r < 1$ のとき次の級数が収束すること及び等号の成立を示せ。

$$\int_{(-\pi, \pi)} f \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \int_{(-\pi, \pi)} f(x) \cos nx \lambda(dx) = \int_{(-\pi, \pi)} f(x) \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \lambda(dx)$$

(ii) 関数 f は区間 $(-\pi, \pi)$ 上で Lebesgue 可積分かつ 0 において連続であるとする。 $r \rightarrow 1$ のとき (i) の右辺の積分は $2\pi f(0)$ に収束することを示せ。

(iii) $f(x) = \pi/2 - |x| \forall x \in (-\pi, \pi)$ であるとする。次が成り立つことを示せ。

$$\int_{(-\pi, \pi)} f(x) \cos nx \lambda(dx) = \begin{cases} 4/n^2 & n \text{ 奇数} \\ 0 & n \text{ 偶数} \end{cases}$$

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2} = \pi^2$ であることを示せ。また $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値を求めよ。

原始関数の正体がよく分かっているときは次の事実に基づいて可積分性判定を行う。その効力は優関数による判定法、演習問題 4.6 を見よ、と協調して発揮されることが多い。

10.3 補題. $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ かつ関数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする。

(i) f は原始関数をもつ。

(ii) f は非負値としたその原始関数の一つを $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ とする。次の同値性が成り立つ。

$$f \text{ Lebesgue 可積分} \Leftrightarrow F \text{ 有界}$$

証明. (i) 記号が簡単になるので $a = -\infty, b = +\infty$ として示す。既知のように有界閉区間上の連続関数は有界である。したがって優関数による判定法を適用して、有界閉区間上で f は Lebesgue 可積分であることが分かる。そこで次の関数を導入する。

$$F(x) := \begin{cases} -\int_{(x,0]} f \lambda & x < 0 \\ \int_{(0,x]} f \lambda & x \geq 0 \end{cases}$$

これが f の原始関数であることを確かめるには次のように変形すればよい。

$$F(x) = \int_{(-n,x]} f \lambda - \int_{(-n,0]} f \lambda$$

但し $n \in \mathbb{N}$ は $-n < x$ となるように十分大きく選んでおく。右辺第 1 項に定理 10.1(i) を適用すると関数 F は微分可能であってその導関数が f であることが導ける。

(ii) 定理 10.1(ii) より f が Lebesgue 可積分なら F は有界である。逆に F が有界であると仮定しよう。定理 10.1(ii) より

$$\int_{(-n,n)} f \lambda = F(n) - F(-n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) - \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

さて $0 \leq 1_{(-n,n)}(x)f(x) \leq 1_{(-n-1,n+1)}(x)f(x)$ かつ $\sup_{n \in \mathbb{N}} 1_{(-n,n)}(x)f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ であるから単調収束定理が適用でき

$$\int_{\mathbb{R}} f \lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{(-n,n)} f \lambda \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) - \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) < +\infty$$

を得る。即ち f は Lebesgue 可積分である。 □

是非次の演習問題を解いてみてほしい。

10.4 演習問題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数としまたその原始関数の一つを $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f が非負値でないなら極限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ がともに存在しても f が Lebesgue 可積分とは限らない。そのような関数 f の例をあげよ。

10.5 例. 関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ は Lebesgue 可積分である。

証明. そのものの原始関数がよく分からないときは、優関数でなじみのあるものを見つけるというのが常套手段である。さて $2|x| \leq x^2 + 1 \quad \forall x$ であるから

$$e^{-x^2} \leq e^{-2|x|+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x \mapsto e^{-2|x|+1}$ の原始関数の一つは次で与えられ、それは明らかに有界である。

$$x \mapsto \begin{cases} e - e^{-2x+1}/2 & x \geq 0 \\ e^{2x+1}/2 & x \leq 0 \end{cases}$$

補題 10.3(ii) により、関数 $x \mapsto e^{-x^2}$ は可積分な優関数を持つ。演習問題 4.6 にある判定法によりそれ自身も可積分である。 □

10.6 演習問題. 関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/(1+|x|^{3/2})$ は Lebesgue 可積分であることを示せ。

10.7 例. (i) 各 $t > 0$ に対して関数 $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}x^{t-1}$ は Lebesgue 可積分である。 $(0, +\infty)$ 上で定義された次の関数を *gamma* 関数 (gamma function) という。

$$\Gamma : t \mapsto \int_{(0,+\infty)} e^{-x}x^{t-1} \lambda(dx)$$

(ii) 各 $s, t > 0$ に対して関数 $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1-x)^{s-1}x^{t-1}$ は Lebesgue 可積分である。 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上で定義された次の関数を *beta* 関数 (beta function) という。

$$B : (s, t) \mapsto \int_{(0,1)} (1-x)^{s-1}x^{t-1} \lambda(dx)$$

証明. (i) まず $0 < t \leq 1$ とする。 $e^{-x}x^{t-1} \leq x^{t-1} \forall x \in (0, 1], e^{-x}x^{t-1} \leq e^{-x} \forall x \in (1, +\infty)$ であるから、積分領域 $(0, +\infty)$ を $(0, 1]$ と $(1, +\infty)$ に分割することにより

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-x}x^{t-1} \lambda(dx) \leq \int_{(0,1]} x^{t-1} \lambda(dx) + \int_{(1,+\infty)} e^{-x} \lambda(dx) = \frac{1}{t} + \frac{1}{e} < +\infty$$

と評価できる。次に $t \geq 1$ とする。各 $x > 0$ に対して $x/t \leq e^{x/t}$ であるから両辺を $t-1$ 乗して比較することにより $x^{t-1} \leq t^{t-1}e^{(1-1/t)x}$ を得る。従って

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-x}x^{t-1} \lambda(dx) \leq \int_{(0,+\infty)} e^{-x}t^{t-1}e^{(1-1/t)x} \lambda(dx) = t^t < +\infty$$

(ii) $(1-x)^{s-1}x^{t-1} \leq (1-x)^{s-1}/2 + x^{t-1}/2 \forall x \in (0, 1)$ であるから、

$$\int_{(0,1)} (1-x)^{s-1}x^{t-1} \lambda(dx) \leq \int_{(0,1)} \left(\frac{(1-x)^{s-1}}{2} + \frac{x^{t-1}}{2} \right) \lambda(dx) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2t} < +\infty$$

と評価できる。 □

10.8 演習問題. *gamma* 関数は微分可能であることを示せ。

10.9 例. 右連続な非減少関数 $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度について $\text{Mble}(dv) = \text{Mble}(\lambda)$ でありかつ非負値 Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f dv^* = \int_{\mathbb{R}} f(x)3x^2 \lambda(dx)$$

証明. まず v は非負値の連続関数 $x \mapsto 3x^2$ の原始関数である。定理 10.1(ii) より

$$(\star 1) \quad \int_{(a,b]} 3x^2 \lambda(dx) = v(b) - v(a) = dv((a, b]) \quad \forall a < \forall b$$

A を Lebesgue 可測集合とする。 A の可算 \mathcal{I} 被覆 C_n に対して

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x)3x^2 \lambda(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n}(x)3x^2 \lambda(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{C_n}(x)3x^2 \lambda(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} dv(C_n)$$

ここで項別積分定理、定理 5.4 参照、を適用した。非減少関数が誘導する外測度の定義より

$$(*)2) \quad \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 3x^2 \lambda(dx) \leq \gamma(dv; A) \quad \forall A \in \text{Mble}(\lambda)$$

さて各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $A \cap (n, n+1]$ も Lebesgue 可測であって、

$$\lambda(A \cap (n, n+1]) \leq \lambda((n, n+1]) = 1 < +\infty$$

が成り立つ。任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。Lebesgue 測度 λ は関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度であったので、各 $n \in \mathbb{Z}$ ごとに $A \cap (n, n+1]$ の可算 \mathcal{I} 被覆 $(a_k, b_k] \quad k \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす。

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \lambda(A \cap (n, n+1]) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}(|n|+1)^2}$$

ここで区間列 $(a_k, b_k] \cap (n, n+1] \quad k \in \mathbb{N}$ も $A \cap (n, n+1]$ の可算被覆であるから、最初から $n \leq a_k < b_k \leq n+1$ であるとしてもかまわない。このとき

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{(a_k, b_k]}(x) - 1_{A \cap (n, n+1]}(x) \right) 3x^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{(a_k, b_k]}(x) - 1_{A \cap (n, n+1]}(x) \right) 3(|n|+1)^2$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ について成り立つ。従って

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{(a_k, b_k]}(x) - 1_{A \cap (n, n+1]}(x) \right) 3x^2 \lambda(dx) \\ & \leq 3(|n|+1)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{(a_k, b_k]}(x) - 1_{A \cap (n, n+1]}(x) \right) \lambda(dx) \\ & = 3(|n|+1)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) - \lambda(A \cap (n, n+1]) \right) \leq \frac{3\varepsilon}{2^{|n|}} \end{aligned}$$

左辺を項別積分定理と $(*)1)$ を適用することにより変形して次の評価を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} dv((a_k, b_k]) - \int_{\mathbb{R}} 1_{A \cap (n, n+1]}(x) 3x^2 \lambda(dx) \leq \frac{3\varepsilon}{2^{|n|}}$$

区間列 $(a_k, b_k] \quad k \in \mathbb{N}$ は $A \cap (n, n+1]$ の可算 \mathcal{I} 被覆であったから

$$\gamma(dv; A \cap (n, n+1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} dv((a_k, b_k]) \leq \int_{\mathbb{R}} 1_{A \cap (n, n+1]}(x) 3x^2 \lambda(dx) + \frac{3\varepsilon}{2^{|n|}}$$

これが各 $n \in \mathbb{Z}$ ごとに成り立つ。次に外測度の可算劣加法性、補題 7.15(iii) 参照、により

$$\begin{aligned} \gamma(dv; A) &= \gamma(dv; \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A \cap (n, n+1])) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(dv; A \cap (n, n+1]) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} 1_{A \cap (n, n+1]}(x) 3x^2 \lambda(dx) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{3\varepsilon}{2^{|n|}} = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 3x^2 \lambda(dx) + 9\varepsilon \end{aligned}$$

いうまでもないが最後の等式を導くのに項別積分定理を適用している。 $\varepsilon > 0$ は任意なので (*2) も考慮に入れて次が導けた。

$$\gamma(dv; A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 3x^2 \lambda(dx) \quad \forall A \in \text{Mble}(\lambda)$$

$B \subset \mathbb{R}$ であり C_n を B の可算 \mathcal{I} 被覆とする。このとき

$$B \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap A), \quad B \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap A^c)$$

であるから単調性と可算劣加法性、補題 7.15(ii), (iii) 参照、により

$$\gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma(dv; C_n \cap A) + \gamma(dv; C_n \cap A^c))$$

$C_n \cap A, C_n \cap A^c$ も Lebesgue 可測であるから右辺は次に等しい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{C_n \cap A}(x) 3x^2 \lambda(dx) + \int_{\mathbb{R}} 1_{C_n \cap A^c}(x) 3x^2 \lambda(dx) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{C_n}(x) 3x^2 \lambda(dx)$$

右辺は (*1) によれば $\sum_{n=1}^{\infty} dv(C_n)$ に等しい。よって

$$\gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} dv(C_n)$$

上の不等式は任意の B の可算 \mathcal{I} 被覆 C_n に対して成り立つので

$$\gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c) \leq \gamma(dv; B) \quad \forall B \subset \mathbb{R}$$

$\gamma(dv; \cdot)$ は劣加法性を持つので逆向きの不等式はいつでも成立する。ゆえに

$$A \in \text{Mble}(\lambda) \Rightarrow A \in \text{Mble}(dv) \quad \text{かつ} \quad dv^*(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) 3x^2 \lambda(dx)$$

今の段階では未確認だが実は $\text{Mble}(dv) = \text{Mble}(\lambda)$ である。これを認めると定理 5.5 により非負値 Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dv^* = \int_{\mathbb{R}} f(x) 3x^2 \lambda(dx)$$

これ以後は $\text{Mble}(dv) \subset \text{Mble}(\lambda)$ の証明にあてる。一般に $A \subset \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ。

$$(*)3 \quad \gamma(dv; A) = \inf \{ dv^*(B) ; B \in \text{Mble}(\lambda), A \subset B \}$$

既に示したように $\text{Mble}(\lambda) \subset \text{Mble}(dv)$ である。よって単調性により

$$B \in \text{Mble}(\lambda), A \subset B \Rightarrow \gamma(dv; A) \leq \gamma(dv; B) = dv^*(B)$$

次に A の可算 \mathcal{I} 被覆 C_n に対して $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \text{Mble}(\lambda)$, $A \subset B$ であり

$$dv^*(B) = dv^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} dv^*(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} dv(C_n)$$

以上により (*3) が示せた。(*3) を適用すると集合列 B_n であって

$$B_n \in \text{Mble}(\lambda), A \subset B_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} dv^*(B_n) = \gamma(dv; A)$$

を満たすものが存在することがわかる。そこで $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ とおくと

$$B \in \text{Mble}(\lambda), A \subset B, dv^*(B) = \gamma(dv; A)$$

が成り立つ。ここで $A \in \text{Mble}(dv)$ とする。

$$dv^*(B) = \gamma(dv; B) = \gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \cap A^c) = \gamma(dv; A) + \gamma(dv; B \setminus A)$$

更に $dv^*(A) < +\infty$ と仮定すると $dv^*(B) = \gamma(dv; A) = dv^*(A) < +\infty$ であるから

$$\gamma(dv; B \setminus A) = 0$$

が導かれる。再び (*3) を適用して $B \setminus A$ に対して同様に議論すると

$$N \in \text{Mble}(\lambda), B \setminus A \subset N, \int_{\mathbb{R}} 1_N(x) 3x^2 \lambda(dx) = dv^*(N) = \gamma(dv; B \setminus A) = 0$$

を満たす集合 N が存在することがわかる。測度の劣加法性と補題 4.12 より

$$\lambda(N) \leq \lambda(\{0\}) + \lambda(\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \in N\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} : 1_N(x) 3x^2 \neq 0\}) = 0$$

すなわち $N \in \text{Null}(\lambda)$ である。さらに $B \setminus A \subset N$ であるから定理 8.12 により

$$B \setminus A \in \text{Null}(\lambda) \subset \text{Mble}(\lambda)$$

が従う。以上より $dv^*(A) < +\infty$ ならば $A = B \setminus (B \setminus A) \in \text{Mble}(\lambda)$ であることが得られた。一般の $A \in \text{Mble}(dv)$ に対しては各 $n \in \mathbb{N}$ ごとに $A \cap (-n, n] \in \text{Mble}(dv)$ かつ

$$dv^*(A \cap (-n, n]) \leq dv^*((-n, n]) = dv((-n, n]) = v(n) - v(-n) = 2n^3 < +\infty$$

であるから $A \cap (-n, n] \in \text{Mble}(\lambda)$ さらに $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap (-n, n]) \in \text{Mble}(\lambda)$ となる。□

例 10.9 で取り上げた命題は次のように拡張できる。

10.10 定理. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は非減少かつ連続微分可能な関数であり、その導関数 v' は

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : v'(x) = 0\}) = 0$$

を満たすとする。このとき v が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度について $\text{Mble}(dv) = \text{Mble}(\lambda)$ でありかつ任意の非負値 Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f dv^* = \int_{\mathbb{R}} f v' \lambda$$

10.11 演習問題. 定理 10.10 を証明せよ。

10.12 注意. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は非増加かつ連続微分可能な関数であり、その導関数 v' は

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : v'(x) = 0\}) = 0$$

を満たすとする。このとき非減少関数 $-v$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度についても定理 10.10 と同様のことがいえる。すなわち $\text{Mble}(d(-v)) = \text{Mble}(\lambda)$ でありかつ任意の非負値 Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f d(-v)^* = \int_{\mathbb{R}} f |v'| \lambda$$

更に連続微分可能性にとりかえて絶対連続性(absolute continuity) という概念を使って定理 10.10 を拡張することができる。興味ある読者は適当な参考書を見つけて知識を深めよ。

10.13 定理. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義増加な連続関数とする。このとき $I := v(\mathbb{R})$ は开区間であり、 v が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度について

$$\gamma(dv; A) = \gamma(\lambda; v(A)) \quad \forall A \subset \mathbb{R}, \text{Mble}(dv) = \{A \subset \mathbb{R} : v(A) \in \text{Mble}(\lambda)\}$$

でありかつ任意の非負値 $\text{Mble}(dv)$ 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f dv^* = \int_I f \circ v^{-1} \lambda$$

証明. 像 $I := v(\mathbb{R})$ は开区間であり、関数 v は \mathbb{R} から I への位相同型 (即ち全単射かつ逆関数 v^{-1} も連続であること) を導く。また逆関数 v^{-1} も狭義増加である。以上の証明は今更する必要はないであろう。従って $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ なら $v((a, b]) = (v(a), v(b)]$ であるから

$$\gamma(\lambda; v((a, b])) = \gamma(\lambda; (v(a), v(b)]) = v(b) - v(a) = dv((a, b])$$

が成り立つ。即ち $\gamma(\lambda; v(C)) = dv(C) \quad \forall C \in \mathcal{I}$ である。ここで $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A の可算 \mathcal{I} 被覆 C_n に対して

$$v(A) \subset v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} v(C_n)$$

であるから、外測度の単調性と可算劣加法性を適用して

$$\gamma(\lambda; v(A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(\lambda; v(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} dv(C_n)$$

を得る。ここで C_n は A の可算 \mathcal{I} 被覆なら任意でよいので

$$\gamma(\lambda; v(A)) \leq \gamma(dv; A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}$$

目標は等号成立を示すことである。さて $\gamma(\lambda; v(A)) = +\infty$ ならもう議論する必要はないので以下 $\gamma(\lambda; v(A)) < +\infty$ として話を進める。任意に $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が与えられたとする。 $v(A)$ の可算 \mathcal{I} 被覆 C_n であって $C_n \subset I$ かつ次を満たすものが存在する。

$$\gamma(\lambda; v(A)) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(\lambda; v(v^{-1}(C_n))) = \sum_{n=1}^{\infty} dv(v^{-1}(C_n))$$

ここで $v^{-1}(C_n) \in \mathcal{I}$ より $\gamma(\lambda; v(v^{-1}(C_n))) = dv(v^{-1}(C_n))$ であることを使った。一方 $v^{-1}(C_n)$ は A の可算 \mathcal{I} 被覆であるから右辺は $\gamma(dv; A)$ をおさえる。従って

$$\gamma(\lambda; v(A)) + \varepsilon \geq \gamma(dv; A)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ は任意であるから目標とする $\gamma(\lambda; v(A)) = \gamma(dv; A)$ が得られた。

さて $A \in \text{Mble}(dv)$, $B \subset \mathbb{R}$ とする。このとき

$$\gamma(dv; v^{-1}(B \cap I)) = \gamma(dv; v^{-1}(B \cap I) \cap A) + \gamma(dv; v^{-1}(B \cap I) \setminus A)$$

である。従って $v(v^{-1}(B \cap I) \cap A) = B \cap v(A)$, $v(v^{-1}(B \cap I) \setminus A) = (B \cap I) \setminus v(A)$ より

$$\gamma(\lambda; B \cap I) = \gamma(\lambda; B \cap v(A)) + \gamma(\lambda; (B \cap I) \setminus v(A))$$

を得る。一方 $I = v(\mathbb{R})$ は开区間なので $I \in \text{Mble}(\lambda)$ である。従って $B \setminus I = (B \setminus v(A)) \setminus I$ かつ $(B \setminus v(A)) \cap I = (B \cap I) \setminus v(A)$ であることより

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda; B) &= \gamma(\lambda; B \cap I) + \gamma(\lambda; (B \setminus v(A)) \setminus I) \\ \gamma(\lambda; B \setminus v(A)) &= \gamma(\lambda; (B \cap I) \setminus v(A)) + \gamma(\lambda; (B \setminus v(A)) \setminus I) \end{aligned}$$

以上より $\gamma(\lambda; B) = \gamma(\lambda; B \cap v(A)) + \gamma(\lambda; B \setminus v(A))$ が成り立つ。即ち $v(A) \in \text{Mble}(\lambda)$ である。逆に $A \subset \mathbb{R}$, $v(A) \in \text{Mble}(\lambda)$ とする。 $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma(dv; B) = \gamma(\lambda; v(B)) = \gamma(\lambda; v(B) \cap v(A)) + \gamma(\lambda; v(B) \setminus v(A))$$

が成り立つ。ここで $v(B) \cap v(A) = v(B \cap A)$ かつ $v(B) \setminus v(A) = v(B \setminus A)$ であるから右辺は $\gamma(dv; B \cap A) + \gamma(dv; B \setminus A)$ に等しい。即ち $A \in \text{Mble}(dv)$ である。

ここで $\text{Mble}(dv)$ 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して合成関数 $f \circ v^{-1} : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\text{Mble}(\lambda)$ 可測であることに注意しておこう。実際 $a \in \mathbb{R}$ が与えられたとき $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\} \in \text{Mble}(dv)$ であるから $\text{Mble}(dv) = \{A \subset \mathbb{R} : v(A) \in \text{Mble}(\lambda)\}$ を適用して

$$\{y \in I : f \circ v^{-1}(y) < a\} = v(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}) \in \text{Mble}(\lambda) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

を得る。 f が非負 $\text{Mble}(dv)$ 単関数であるとする。このとき補題 3.4(i) と定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dv^* = \sum_{y \in \text{Image } f} y \, dv^*(f^{-1}(\{y\})) = \sum_{y \in \text{Image } f \circ v^{-1}} y \lambda(v(f^{-1}(\{y\}))) = \int_I f \circ v^{-1} \, \lambda$$

となる。一般には補題 3.17(ii) により非負値 $\text{Mble}(dv)$ -単関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の列 f_n で $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dv^* = \int_I f_n \circ v^{-1} \, \lambda$$

なので定理 3.18 を適用して結論に至る。 □

10.14 注意. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義減少な連続関数とする。このとき $I := v(\mathbb{R})$ はやはり开区間であり、非減少関数 $-v$ が誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度について定理 10.13 と同様のことがいえる。すなわち

$$\gamma(d(-v); A) = \gamma(\lambda; v(A)) \quad \forall A \subset \mathbb{R}, \text{Mble}(d(-v)) = \{A \subset \mathbb{R} : v(A) \in \text{Mble}(\lambda)\}$$

でありかつ任意の非負値 $\text{Mble}(dv)$ 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f d(-v)^* = \int_I f \circ v^{-1} \lambda$$

次はいわゆる変数変換公式(change of variable formula) である。

10.15 系. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続微分可能な非減少関数 (または連続微分可能な非増加関数) であり、その導関数 v' は

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : v'(x) = 0\}) = 0$$

を満たすとする。このとき $I := v(\mathbb{R})$ は开区間である。任意の Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して $f \circ v^{-1} : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ も Lebesgue 可測であり、 f が非負値であるなら次が成り立つ。

$$\int_I f \circ v^{-1} \lambda = \int_{\mathbb{R}} f |v'| \lambda$$

証明. v は非減少であるとして議論を進める。与えられた条件より v' は連続かつ非負値である。 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とする。関数 v は狭義増加であることを確かめよう。 $v' > 0$ λ -a.e. であるから定理 10.1(ii) と補題 4.12 より

$$v(b) - v(a) = \int_{(a,b)} v' \lambda > 0$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を Lebesgue 可測関数とする。ここで定理 10.10 と定理 10.13 により

$$\text{Mble}(\lambda) = \text{Mble}(dv) = \{A \subset \mathbb{R} : v(A) \in \text{Mble}(\lambda)\}$$

よって $f \circ v^{-1} : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ も Lebesgue 可測であることが導かれる。 \square

10.16 例. (i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ とする。任意の Lebesgue 可測関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f((x - \beta)/\alpha)$ も Lebesgue 可測であり、 f が非負値であるなら次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f((x - \beta)/\alpha) \lambda(dx) = |\alpha| \int_{\mathbb{R}} f \lambda$$

(ii) 任意の Lebesgue 可測関数 $f : (0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して $(0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f(\sqrt{x})$ も Lebesgue 可測であり、 f が非負値であるなら次が成り立つ。

$$\int_{(0,+\infty)} f(\sqrt{x}) \lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)} f(x) 2x \lambda(dx)$$

(iii) 任意の Lebesgue 可測関数 $f : (0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して $(0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f(1/x)$ も Lebesgue 可測であり、 f が非負値であるなら次が成り立つ。

$$\int_{(0,+\infty)} f(1/x) \lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)} \frac{f(x)}{x^2} \lambda(dx)$$

証明. (i) $v : x \mapsto \alpha x + \beta$ に系 10.15 を適用する。

(ii) $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ に系 10.15 を適用する。

(iii) $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ に系 10.15 を適用する。 □

10.17 例. (i) 各 $t, s > 0$ に対して $B(t, s) = B(s, t)$ が成り立つ。

(ii) 各 $s, t > 0$ に対して $B(s, t) = 2 \int_{(0,1)} (1-x^2)^{s-1} x^{2t-1} \lambda(dx)$ が成り立つ。 $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

(iii) 各 $t > 0$ に対して $\Gamma(t) = 2 \int_{(0,+\infty)} e^{-x^2} x^{2t-1} \lambda(dx)$ が成り立つ。

(iv) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\int_{\mathbb{R}} x^{2k} e^{-x^2} \lambda(dx) = \sqrt{\pi} \frac{(2k)!}{4^k k!}, \int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} e^{-x^2} \lambda(dx) = 0$ が成り立つ。

証明. (i) $\alpha = -1, \beta = 1$ として積分 $\int_{(0,1)} (1-x)^{s-1} x^{t-1} \lambda(dx)$ に例 10.16(i) を適用する。

(ii), (iii) 例 10.16(ii) を適用する。

(iv) $z \in \mathbb{R}$ とする。例 10.5 より関数

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{z^2/4} e^{-x^2}$$

は可積分である。 $\alpha = 1, \beta = z/2$ として例 10.16(i) を適用して次を得る。

$$\int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} \lambda(dx) = e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx)$$

一方、補題 5.4 を適用し、さらに $e^{|zx|} \leq e^{zx} + e^{-zx}$ を使って評価する。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|zx|^n}{n!} e^{-x^2} \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} e^{-x^2} \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{|zx|} e^{-x^2} \lambda(dx) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} + e^{-zx}) e^{-x^2} \lambda(dx) = 2e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) < +\infty \end{aligned}$$

従って定理 6.14 が適用でき、次のように変形できる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} \lambda(dx) = e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

上は z についての整級数であるが、それは全ての $z \in \mathbb{R}$ について収束している。整級数の一意性により右辺を z について展開したときの係数は左辺のものと一致する。よって

$$\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} \lambda(dx) = \begin{cases} \frac{1}{4^k k!} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) & n = 2k \\ 0 & n = 2k - 1 \end{cases}$$

が各 $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ。あとは

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) = \sqrt{\pi}$$

を示さねばならないが、これは例 14.9 まで先延ばしする。 □

10.18 演習問題. $\int_{\mathbb{R}} \cos(zx)e^{-x^2} \lambda(dx) = \sqrt{\pi}e^{-z^2/4} \quad \forall z \in \mathbb{R}$ を示せ。Gauss 核の cosine 変換(cosine transform of gauss kernel)

10.19 例. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t)}{t^{t-1/2}e^{-t}} = \sqrt{2\pi}$ が成り立つ。Stirling の公式(Stirling's formula)

証明. $t > 0$ をひとまず固定する。連続微分可能な関数 v を導入する。

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto te^{x/\sqrt{t}}$$

微分すると $v'(x) = \sqrt{t}e^{x/\sqrt{t}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ である。また $v(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ である。次に

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp\{-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t})\}/v'(x)$$

という非負値連続関数を導入する。さて

$$f \circ v^{-1}(x) = t^{-t+1/2}e^t e^{-x} x^{t-1} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

である。よって系 10.15 を適用することにより

$$t^{-t+1/2}e^t \Gamma(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t})\} \lambda(dx)$$

右辺の被積分関数は $t \rightarrow +\infty$ の極限で関数 $x \mapsto e^{-x^2/2}$ に各点収束する。Lebesgue の収束定理を適用したいのであるがそのためには可積分な優関数を見つける必要がある。そこで

$$c := \int_{(0,1)} (1-u)e^{-2u} \lambda(du)$$

とおくと $0 < c < +\infty$ である。このとき次の評価が成り立つ。

$$t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t}) = \int_0^1 (1-u)e^{ux/\sqrt{t}} \lambda(du) \quad x^2 \geq cx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ with } x \geq -2\sqrt{t}$$

従って $1_{(-2\sqrt{t}, +\infty)}(x) \exp\{-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t})\} \leq e^{-cx^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ であるので

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{(-2\sqrt{t}, +\infty)} \exp\{-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t})\} \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \lambda(dx) = \sqrt{2\pi}$$

を得る。一方 $-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t}) \leq t + \sqrt{t}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ であるから

$$\int_{(-\infty, -2\sqrt{t}]} \exp\{-t(e^{x/\sqrt{t}} - 1 - x/\sqrt{t})\} \lambda(dx) \leq \int_{(-\infty, -2\sqrt{t}]} e^{t+\sqrt{t}x} \lambda(dx) = e^{-t}/\sqrt{t}$$

とおさえられるので $(-\infty, -2\sqrt{t}]$ 上の積分は 0 に収束する。 □

以下は Riemann 積分に拘りたい方向けのものである。

10.20 演習問題. Riemann 可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して以下を示せ。

(i) f は Lebesgue 可測である。

(ii) $\int_{(a,b]} f \lambda = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$. 但し右辺は Riemann 積分である。

(iii) f が Lebesgue 可積分 $\Leftrightarrow f$ の広義積分が絶対収束する

(iv) Lebesgue 可積分なとき、 $\int_{\mathbb{R}} f \lambda$ は広義積分に一致する。

11 拡張の一意性とその応用

Hopf の拡張定理によれば、 σ -加法的な有限加法的測度は必ず測度に拡張される。この節では拡張の一意性について議論し、その応用として Lebesgue 測度の平行移動不変性を導く。

前提

(\mathcal{C}, m) を \mathbb{R}^d 上の σ -加法的な有限加法的測度とする。

$(\text{Mble}(m), m^*)$ は \mathbb{R}^d 上の測度で (\mathcal{C}, m) を拡張する。さて \mathcal{B} を \mathbb{R}^d 上の σ -加法族で \mathcal{C} を含むもの、 $(\mathcal{B}, \mu_1), (\mathcal{B}, \mu_2)$ を \mathbb{R}^d 上の測度で (\mathcal{C}, m) を拡張するものとする。問題はいつ $\mu_1 = \mu_2$ がいえるかである。そのための条件は、 (\mathcal{C}, m) および \mathcal{B} 両方に関わることになる。

11.1 定義. (\mathcal{C}, m) が σ -有限 (σ -finite) であるとは \mathbb{R}^d の可算 \mathcal{C} -被覆 $C_n, n \in \mathbb{N}$ で $m(C_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在することをいう。

11.2 演習問題. $m^*(\mathbb{R}^d) < +\infty$ であれば、 m は σ -有限であることを示せ。

11.3 補題. (\mathcal{C}, m) が σ -有限なら \mathbb{R}^d の可算 \mathcal{C} -分割 Δ で $m(J) < \infty, \forall J \in \Delta$ をみたすものが存在する。

証明. $C_n, n \in \mathbb{N}$ を σ -有限性の定義にあるもの、それに対し集合族の列 $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$ を補題 7.17 で述べられたものとする。補題 7.12(iv) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J \in \Delta_n} m(J) \leq \sum_{k=1}^n m(C_k) < +\infty.$$

従って \mathbb{R}^d の可算 \mathcal{C} -分割 $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は $m(J) < \infty, \forall J \in \Delta$ をみたす。□

11.4 補題. (\mathcal{B}, μ) を \mathbb{R}^d 上の測度で (\mathcal{C}, m) を拡張するものとする。即ち $A \in \mathcal{B}, \mu(A) = m(A), \forall A \in \mathcal{C}$ 。このとき (\mathcal{C}, m) が σ -有限なら $\mu(A) = m^*(A), \forall A \in \mathcal{B} \cap \text{Mble}(m)$ が成り立つ。

証明. 先ず次の不等式が成り立つことを示す。

$$(*) \quad \mu(A) \leq \gamma(m; A), \forall A \in \mathcal{B}.$$

$C_n, n \in \mathbb{N}$ を A の可算 \mathcal{C} -被覆とする。 $C_n \in \mathcal{B}, \mu(C_n) = m(C_n)$ である。補題 6.19 により

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n).$$

よって不等式 (*) が成り立つ。 σ -有限性により補題 11.3 にあるような \mathbb{R}^d の可算 \mathcal{C} -分割 Δ が存在する。 $J \in \Delta$ としよう。 $J \in \mathcal{B}, \mu(J) = m(J) < +\infty$ であるから

$$\mu(A \cap J) = \mu(J) - \mu(A^c \cap J) \geq m(J) - \gamma(m; A^c \cap J), \forall A \in \mathcal{B}.$$

ここで不等号は (*) を $A^c \cap J \in \mathcal{B}$ に適用して導かれている。さらに $A \in \text{Mble}(m)$ も仮定する。定理 8.13 と定理 8.15 により $J \in \text{Mble}(m)$, $m^*(J) = m(J) < +\infty$ であるから

$$m(J) - \gamma(m; A^c \cap J) = m^*(J) - m^*(A^c \cap J) = m^*(A \cap J).$$

以上と μ, m^* 双方の σ -加法性により

$$\mu(A) = \sum_{J \in \Delta} \mu(A \cap J) \geq \sum_{J \in \Delta} m^*(A \cap J) = m^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{B} \cap \text{Mble}(m).$$

さて $A \in \mathcal{B} \cap \text{Mble}(m)$ に対しては (*) の右辺は $m^*(A)$ に等しいので結論を得る。 \square

補題 11.4 ではふたつの σ -加法族の共通部 $\mathcal{B} \cap \text{Mble}(m)$ が現れた。実はそのようなものは σ -加法族である。例えば有限加法的測度を複数扱うとなるとそれに応じて σ -加法族も複数現れることになるので一般的な定式化を行う。

11.5 補題. \mathbb{R}^d 上の σ -加法族たち \mathcal{B}_α に対してそれらの共通部 $\bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ も σ -加法族である。

証明. (i) $\emptyset \in \mathcal{B}_\alpha \quad \forall \alpha$ であるから、 $\emptyset \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ である。

(ii) $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ とする。これは $A \in \mathcal{B}_\alpha \quad \forall \alpha$ を意味する。各 \mathcal{B}_α は σ -加法族なので、 $A^c \in \mathcal{B}_\alpha$ である。これが任意の α について成り立つので $A^c \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ が導かれる。

(iii) $A_n \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ とする。これは $A_n \in \mathcal{B}_\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha$ を意味する。各 \mathcal{B}_α は σ -加法族なので、 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}_\alpha$ である。 α は任意なので $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ が導かれる。 \square

11.6 系. \mathbb{R}^d の部分集合の族 \mathcal{A} に対して次の条件を満たす集合族がただ一つ存在する。

(i) B は \mathbb{R}^d 上の σ -加法族かつ $\mathcal{A} \subset B$ である。

(ii) 条件 (i) を満たす任意の集合族 B' に対して $B \subset B'$ である。最小性

証明. 先ず \mathcal{A} を内包する \mathbb{R}^d 上の σ -加法族は存在する。実際、 $\text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ がそうである。そこで条件 (i) を満たす任意の集合族たちすべての共通部をとれば、それは補題 11.5 により σ -加法族である。しかもそれは条件 (ii) も満たす。一意性の確認は読者にゆだねる。 \square

11.7 定義. \mathbb{R}^d の部分集合の族 \mathcal{A} に対し系 11.6 で規定される σ -加法族を記号 $\sigma(\mathcal{A})$ で表し、これを \mathcal{A} で生成される σ -加法族(σ -field generated by \mathcal{A}) と呼ぶ。

次の定理は有限加法的測度の測度への拡張の一意性を述べるもので、考察の対象となる測度の性質を調べたり逆にそれを利用して測度を特定したりするのにきわめて有効である。

11.8 定理. σ -有限な (\mathcal{C}, m) の $\sigma(\mathcal{C})$ への測度としての拡張は一意的である。すなわち \mathbb{R}^d 上の測度 $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ が (\mathcal{C}, m) を拡張するなら $\mu(A) = m^*(A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{C})$ が成り立つ。

証明. $\sigma(\mathcal{C}) \subset \text{Mble}(m)$ であるから、補題 11.4 より直ちに導かれる。 \square

約束

以下 \mathcal{I} は左半開区間の全体に空集合 \emptyset を付加した集合族を表す。

11.9 定義. \mathbb{R} 上の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{I})$ を *Borel 集合族*(Borel σ -field) と呼び記号 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ で表す。 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -集合を *Borel 集合*(Borel set) という。 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測な関数は *Borel 可測関数*とも呼ばれる。また $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を定義域とする \mathbb{R} 上の測度を *Borel 測度*(Borel measure) という。さらに \mathbb{R} 上の Borel 測度 μ で条件 $\mu(J) < +\infty \forall J \in \mathcal{I}$ を満たすものを *Radon 測度*(Radon measure) という。

次の定理は *Lebesgue-Stieltjes 測度の一意性*を主張している。

11.10 定理. $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする。このとき v の誘導する Lebesgue-Stieltjes 測度 dv^* の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限は、次を満たす唯一の \mathbb{R} 上の Borel 測度である。

$$\mu((a, b]) = v(b) - v(a) \quad \forall a < \forall b.$$

証明. 関数 v の誘導する有限加法的測度は

$$dv((a, b]) = v(b) - v(a) < +\infty \quad \forall a < \forall b \in \mathbb{R}$$

を満たすので σ -有限である。よって定理 9.6 と定理 11.8 をくみあわせて結論を得る。 □

Borel 集合族の重要性のもう一つの側面は次に述べるものである。

11.11 補題. 連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。

証明. 補題 9.10 の証明がここでもそのまま通用する。 □

11.12 補題. μ を \mathbb{R} 上の Borel 測度、 $t \in \mathbb{R}$ とする。

(i) $A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つ。ただし $A + t := \{x + t; x \in A\}$ 。

(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \mu(A + t)$ は \mathbb{R} 上の測度である。

証明. (i) 次が成り立つから集合族 $\mathcal{B} := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}) : A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ は σ -加法族である。

$$(11.13) \quad \emptyset + t = \emptyset, \quad A^c + t = (A + t)^c, \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) + t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + t).$$

また $(a, b] + t = (a + t, b + t]$ であるから \mathcal{B} は \mathcal{I} を含む σ -加法族である。 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ はそのようなものの最小であったので $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ 即ち $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A + t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が導かれる。

(ii) σ -加法性を確かめればよいがこれは演習問題とする。 □

11.14 演習問題. (11.13) を示せ。また補題 11.12(ii) を示せ。

補題 11.12(i) の証明ポイントが理解できたかを試すには次の問題を解くとよいだろう。

11.15 演習問題. \mathcal{B} を \mathbb{R}^d 上の σ 加法族、 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} 可測関数とする。

(i) 集合族 $\{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}) : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$ は σ -加法族であることを示せ。

(ii) $f^{-1}(A) \in \mathcal{B} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ。

1 次元 Lebesgue 測度の著しい特徴は平行移動不変性(translation invariance) である。それだけでなく平行移動不変性な \mathbb{R} 上の測度は実質上 Lebesgue 測度だけなのである。以上が定理 11.16 の内容である。この性質ゆえ Lebesgue 測度は解析学において特別な役割を果たす。その典型例が定理 10.1 で述べた微積分の基本定理である。

11.16 定理. λ を 1 次元 Lebesgue 測度、 μ を \mathbb{R} 上の Radon 測度とする。

(i) $\lambda(A+t) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mu(A+t) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{I} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu(A) = \mu((0,1])\lambda(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

証明. (i) 補題 11.12 で見たように $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \lambda(A+t)$ は \mathbb{R} 上の測度である。しかも

$$\lambda((a,b] + t) = \lambda((a+t, b+t]) = b-a \forall a < \forall b.$$

ゆえに定理 11.10 を適用して (i) を得る。

(ii) $(0, +\infty)$ 上の関数 $t \mapsto \mu((0,t])$ は右連続である。さらに有限加法性と仮定により

$$\mu((0, t+s]) = \mu((0,t]) + \mu((t, t+s]) = \mu((0,t]) + \mu((0,s]) \forall t > 0 \forall s > 0.$$

よって $\mu((0,t]) = \mu((0,1])t \forall t > 0$ が導けるがその実行は演習問題 11.17 に委ねる。これを使うと

$$\mu((a,b]) = \mu((0, b-a]) = \mu((0,1])(b-a) \forall a < \forall b.$$

再び定理 11.10 を適用して (ii) を得る。 □

11.17 演習問題. 関数 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は条件 $f(t+s) = f(t) + f(s) \forall t \forall s$ を満たしかつ右連続であるとする。このとき $f(t) = f(1)t \forall t$ であることを示せ。

12 直積測度としての 2 次元 Lebesgue 測度

この節では測度の直積とその一意性について議論する。その応用として 2 次元 Lebesgue 測度の存在を示しさらに Lebesgue 測度の平行移動および回転不変性を導く。また直積測度は確率論における独立性の概念と密接に結びついている。

前提

(\mathcal{C}_1, m_1) を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の有限加法的測度、 (\mathcal{C}_2, m_2) を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の有限加法的測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。

記号

$\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の部分集合族 \mathcal{C}_1 と $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の部分集合族 \mathcal{C}_2 に対して \mathbb{R}^d 上の部分集合族を以下で導入する。

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{A \times B; A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$$

集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に属する集合を $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 長方形集合(rectangular set) という。

12.1 補題. \mathbb{R}^d 上の集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化が成り立つ。

証明. まず $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。次に $A_1, B_1 \in \mathcal{C}_1, A_2, B_2 \in \mathcal{C}_2$ とする。このとき

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2.$$

よって集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化 (i) が成り立つ。他方 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ かつ $A_1 \times A_2 \neq \emptyset$ と仮定しよう。このとき $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ および

$$(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2) = (A_1 \times (B_2 \setminus A_2)) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times B_2)$$

が成り立ち、右辺は非交叉な合併である。さて $B_1 \setminus A_1$ の有限な \mathcal{C}_1 -分割 Δ_1 と $B_2 \setminus A_2$ の有限な \mathcal{C}_2 -分割 Δ_2 が存在する。

$$\{A_1 \times J; J \in \Delta_2\} \cup \{I \times B_2; I \in \Delta_1\}$$

が補題 7.2 の公理化 (ii) を成立させる有限な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ -分割である。 □

記号

$\text{proj}_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(1)}, \text{proj}_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(2)}$ は次で定義される写像を表す。

$$\text{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \text{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

12.2 補題. $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \Rightarrow \text{proj}_1 A \in \mathcal{C}_1, \text{proj}_2 A \in \mathcal{C}_2, A = (\text{proj}_1 A) \times (\text{proj}_2 A)$.

証明. $A_1 \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^{d(1)}), A_2 \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^{d(2)})$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\text{proj}_1(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_1 & \text{if } A_2 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_2 = \emptyset \end{cases}, \text{proj}_2(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_2 & \text{if } A_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_1 = \emptyset \end{cases}.$$

$A_1 \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A_2 = \emptyset$ であるから結論を得る。 □

記号

$m_1 \times m_2 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は約束 $0\infty = 0$ のもと次で定義される関数を表す。

$$A \mapsto m_1(\text{proj}_1 A)m_2(\text{proj}_2 A)$$

12.3 補題. m_1, m_2 とともに σ -加法的なら、関数 $m_1 \times m_2 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は σ -加法的な \mathbb{R}^d 上の有限加法的測度である。

証明. (i) まず補題 12.1 により集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に対し補題 7.2 の公理化が成り立つ。

(ii) 定義より $(m_1 \times m_2)(A) = m_1(\text{proj}_1 A)m_2(\text{proj}_2 A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。また $(m_1 \times m_2)(\emptyset) = m_1(\emptyset)m_2(\emptyset) = 0$ である。

(iii) Δ を $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ の可算な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ -分割とする。このとき補題 12.2 により

$$1_A(x, y) = 1_{\text{proj}_1 A}(x)1_{\text{proj}_2 A}(y), 1_J(x, y) = 1_{\text{proj}_1 J}(x)1_{\text{proj}_2 J}(y) \quad J \in \Delta$$

であるから次が成り立つ。

$$1_{\text{proj}_1 A}(x)1_{\text{proj}_2 A}(y) = \sum_{J \in \Delta} 1_{\text{proj}_1 J}(x)1_{\text{proj}_2 J}(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)} \forall y \in \mathbb{R}^{d(2)}.$$

σ -加法性により $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の測度 $(\text{Mble}(m_2), m_2^*)$ は (\mathcal{C}_2, m_2) を拡張する。各 $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ に対し非負値な $\text{Mble}(m_2)$ -可測関数

$$\mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto 1_{\text{proj}_1 A}(x) 1_{\text{proj}_2 A}(y)$$

の m_2^* についての積分を補題 5.4 を適用して評価すると

$$1_{\text{proj}_1 A}(x) m_2^*(\text{proj}_2 A) = \sum_{J \in \Delta} 1_{\text{proj}_1 J}(x) m_2^*(\text{proj}_2 J) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。 $m_2^*(I) = m_2(I) \quad \forall I \in \mathcal{C}_2$ を使って両辺を次のように書き換える。

$$m_2(\text{proj}_2 A) 1_{\text{proj}_1 A}(x) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\text{proj}_2 J) 1_{\text{proj}_1 J}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}.$$

他方、 $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の測度 $(\text{Mble}(m_1), m_1^*)$ は (\mathcal{C}_1, m_1) を拡張する。非負値な $\text{Mble}(m_1)$ -可測関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto m_2(\text{proj}_2 A) 1_{\text{proj}_1 A}(x)$$

の m_1^* についての積分を再び補題 5.4 を適用して評価すると

$$m_2(\text{proj}_2 A) m_1^*(\text{proj}_1 A) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\text{proj}_2 J) m_1^*(\text{proj}_1 J).$$

$m_1^*(I) = m_1(I) \quad \forall I \in \mathcal{C}_1$ および $m_1 \times m_2$ の定義により左辺は $(m_1 \times m_2)(A)$ に等しく右辺は $\sum_{J \in \Delta} (m_1 \times m_2)(J)$ に等しい。よって σ -加法性も確かめられた。 \square

12.4 系. m_1, m_2 とともに σ -加法的なら、 \mathbb{R}^d 上の測度 $(\text{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^*)$ は有限加法的測度 $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ を拡張する。

証明. 定理 8.18 と補題 12.3 による。 \square

記号

λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。

一般に測度は σ -加法的な有限加法的測度でもあるので、 \mathbb{R}^2 上の σ -加法的な有限加法的測度 $(\text{Mble}(\lambda) \times \text{Mble}(\lambda), \lambda \times \lambda)$ に対して、系 12.4 が適用できる。これをふまえて

12.5 定義. \mathbb{R}^2 上の測度 $(\text{Mble}(\lambda \times \lambda), (\lambda \times \lambda)^*)$ を 2 次元 Lebesgue 測度、 $\text{Mble}(\lambda \times \lambda)$ -集合を 2 次元 Lebesgue 可測集合という。

記号

$\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。

系 12.4 によりたしかに 2 次元 Lebesgue 測度は存在するが、やはり Lebesgue 可測集合の正体がかみきれない。そこで σ -有限性のもとでの一意性を論じる。

12.6 定理. $(\mathcal{C}_1, m_1), (\mathcal{C}_2, m_2)$ はともに σ -加法的かつ σ -有限とする。このとき $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ で定義された \mathbb{R}^d 上の測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = m_1(\text{proj}_1 A) m_2(\text{proj}_2 A) \quad \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$$

を満たすものは $(\text{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^*)$ の $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ 上への制限に等しい。

証明. $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ は σ -有限となるので定理 11.8 より直ちに導かれる。□

実用上よく利用される直積測度の一意性(uniqueness of product measure) についてのべる。

12.7 定義. \mathcal{B}_1 を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -加法族、 \mathcal{B}_2 を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ -加法族とする。このとき \mathbb{R}^d 上の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ を直積 σ -加法族(product σ -field) と呼び記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で表す。また \mathcal{B}_1 を定義域とする $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の測度 μ_1 と \mathcal{B}_2 を定義域とする $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の測度 μ_2 について $(\mu_1 \times \mu_2)^*$ の $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ への制限を直積測度(product measure) と呼び $\mu_1 \otimes \mu_2$ で表すことが多い。

12.8 注意. $\text{Mble}(\lambda) \otimes \text{Mble}(\lambda) \subset \text{Mble}(\lambda \times \lambda)$ であることは定義から直ちに分かる。両者は一致しないことが知られている。

12.9 系. (\mathcal{B}_1, μ_1) を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -有限な測度、 (\mathcal{B}_2, μ_2) を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ -有限な測度とする。このとき $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で定義された \mathbb{R}^d 上の測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = \mu_1(\text{proj}_1 A) \mu_2(\text{proj}_2 A) \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$$

を満たすものがただひとつ存在し、それは直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ である。

約束

以下 \mathcal{I} は左半開区間の全体に空集合 \emptyset を付加した集合族を表す。

12.10 定義. \mathbb{R}^2 上の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{I})$ を 2次元 Borel 集合族(2-dimensional Borel σ -field) と呼び記号 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ で表す。 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -集合を 2次元 Borel 集合という。 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測な関数は Borel 可測関数とも呼ばれる。また $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を定義域とする \mathbb{R}^2 上の測度を Borel 測度という。さらに \mathbb{R}^2 上の Borel 測度 μ で条件 $\mu(J) < +\infty \quad \forall J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ を満たすものを Radon 測度という。(一般の \mathbb{R}^d でも同様のものを考えるが詳細は省略する。)

2次元 Lebesgue 測度の一意性(uniqueness of Lebesgue measure) は次のように表現できる。

12.11 定理. 2次元 Lebesgue 測度 $\lambda^{(2)}$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ への制限は、

$$\mu((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \quad \forall a_1 < \forall b_1 \quad \forall a_2 < \forall b_2$$

を満たす唯一の \mathbb{R}^2 上の Borel 測度である。

証明. 系 12.4 によれば、2次元 Lebesgue 測度 $\lambda^{(2)}$ は

$$\lambda^{(2)}(A) = \lambda(\text{proj}_1 A) \lambda(\text{proj}_2 A) \quad \forall A \in \text{Mble}(\lambda) \times \text{Mble}(\lambda)$$

を満たす。 $\mathcal{I} \subset \text{Mble}(\lambda)$ であったので、 $\lambda^{(2)}$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ への制限は所定の条件を満たす。従って存在が分かる。次に μ を所定の条件を満たす \mathbb{R}^2 上の Borel 測度としよう。また、 m を 1 次元 Lebesgue 測度 λ の \mathcal{I} への制限で与えられる有限加法的測度としよう。ともに \mathbb{R}^2 上の σ -有限な有限加法的測度 $(\mathcal{I} \times \mathcal{I}, m \times m)$ を拡張するので

$$\mu(A) = (m \times m)^*(A) = \lambda^{(2)}(A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

が定理 12.6 により成り立つ。 □

Lebesgue 測度と平行移動との結びつきは高次元の場合にも強固である。多次元においては回転が重要な役割を果たすのでまとめて議論するために少し一般的に設定する。次の補題は、次節以降で述べる Fubini の定理の応用に際しても重要である。

12.12 補題. (i) $\mathbb{R}^{d(1)}$ の可算 \mathcal{C}_1 被覆と $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 \mathcal{C}_2 被覆が存在するなら \mathbb{R}^d 上の σ 加法族 $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ と $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ は一致する。

(ii) m_1, m_2 はともに σ -加法的かつ σ -有限とする。 μ_1 を m_1^* の $\sigma(\mathcal{C}_1)$ への制限、 μ_2 を m_2^* の $\sigma(\mathcal{C}_2)$ への制限とすると $\mu_1 \otimes \mu_2$ は $(m_1 \times m_2)^*$ を $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ に制限したものである。

証明. (i) まず $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ である。右辺は $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ を含む σ -加法族であるがそのようなものの最小が $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ を得る。次の集合族 \mathcal{B} が $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -加法族であることを示すのは演習問題に委ねる。

$$\mathcal{B} := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^{d(1)}) : A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)\}.$$

$A \in \mathcal{C}_1$ について $A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ はいえないかもしれないが、 $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 \mathcal{C}_2 被覆が存在するので、 $A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ は真である。従って \mathcal{B} は \mathcal{C}_1 を含む σ -加法族となるが、そのようなものの最小が $\sigma(\mathcal{C}_1)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}$ である。すなわち

$$A \in \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow A \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2).$$

同様に $B \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \mathbb{R}^{d(1)} \times B \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ も成り立つ。以上より

$$A \in \sigma(\mathcal{C}_1), B \in \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow A \times B = (A \times \mathbb{R}^{d(2)}) \cap (\mathbb{R}^{d(1)} \times B) \in \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2).$$

従って $\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)$ は σ -加法族 $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ に含まれる。 $\sigma(\mathcal{C}_1) \times \sigma(\mathcal{C}_2)$ で生成される σ -加法族が $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2)$ なので $\sigma(\mathcal{C}_1) \otimes \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ を得る。

(ii) (i) により $\mu_1 \otimes \mu_2$ は定理 12.6 の条件を満たす。 □

12.13 演習問題. 補題 12.12 の証明に登場した集合族 \mathcal{B} は σ -加法族であることを示せ。

12.14 系. (i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) m を λ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限とすると $m \otimes m$ は $\lambda^{(2)}$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に制限したものである。

証明. 補題 12.12 から直ちに分かる。 □

警告

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なら $\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{proj}_2 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるが、一般には $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ から $\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ や $\text{proj}_2 A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ は従わない。

12.15 補題. \mathbb{R}^2 の開部分集合全体で生成される σ -加法族は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と一致する。

証明. \mathbb{R} の开区間全体を \mathcal{U} とあらわす。次に着目する。

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + 1/n) \in \sigma(\mathcal{U}), \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - 1/n] \in \sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

左から $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{U})$ が分かり、右から $\sigma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が分かる。よって

$$\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ここで補題 12.12 と系 12.14 を適用して

$$\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U}) \otimes \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

次に \mathbb{R}^2 の開部分集合全体を \mathcal{O} とあらわす。 $(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ -集合はすべて \mathcal{O} -集合であるから、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{O}).$$

他方、次が成り立つので任意の \mathcal{O} -集合は σ -加法族 $\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ に属する。

(12.16) 任意の \mathbb{R}^2 の開部分集合は $(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$ -集合の可算合併である。

したがって $\sigma(\mathcal{O})$ の定義により $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を得る。 □

12.17 演習問題. (12.16) を示せ。

12.18 補題. 連続関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。

証明. $a \in \mathbb{R}$ とする。連続性より $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < a\}$ は開集合である。従って補題 12.15 を適用して $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が導ける。 □

12.19 補題. μ を \mathbb{R}^2 上の Borel 測度、 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を連続写像とする。

(i) $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が成り立つ。任意の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して合成関数 $f \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ も $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。

(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A))$ は \mathbb{R}^2 上の測度である。

証明. (i) 次の集合族が \mathbb{R}^2 上の σ -加法族であることを示すのは演習問題に委ねる。

$$\mathcal{B} := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^2) : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}.$$

φ の連続性と補題 12.15 により

$$U \text{ } \mathbb{R}^2 \text{ の開部分集合} \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \text{ 開集合} \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

従って任意の開部分集合は σ -加法族 \mathcal{B} に属する。補題 12.15 によれば開部分集合全体が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を生成するので $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}$ を得る。すなわち

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

つぎに f の可測性により $\{y \in \mathbb{R}^2 : f(y) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall a \in \mathbb{R}$ である。よって

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : f(\varphi(x)) < a\} = \varphi^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^2 : f(y) < a\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall a \in \mathbb{R}$$

が導かれる。すなわち $f \circ \varphi$ も $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。(ii) を示すのは演習問題とする。 \square

12.20 演習問題. (i) 補題 12.19 の証明で登場した \mathcal{B} は σ -加法族であることを示せ。
(ii) 補題 12.19(ii) を示せ。

次に述べるように 2 次元 Lebesgue 測度は平行移動不変性を持ち、逆に平行移動不変な \mathbb{R}^2 上の測度は実質上 2 次元 Lebesgue 測度だけなのである。

12.21 定理. μ を \mathbb{R}^2 上の Radon 測度とする。

(i) $\lambda^{(2)}(A+t) = \lambda^{(2)}(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall t \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $\mu(A+t) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \forall t \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mu(A) = \mu((0,1] \times (0,1])\lambda^{(2)}(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

証明. (i) 補題 12.19 により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \lambda^{(2)}(A+t)$ は \mathbb{R}^2 上の測度である。さて

$$\text{proj}_1(J+t) = \text{proj}_1 J + t_1, \text{proj}_2(J+t) = \text{proj}_2 J + t_2 \forall J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$$

である。よって各 $J \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ に対して

$$\lambda^{(2)}(J+t) = \lambda(\text{proj}_1 J + t_1)\lambda(\text{proj}_2 J + t_2) = \lambda(\text{proj}_1 J)\lambda(\text{proj}_2 J) = \lambda^{(2)}(J).$$

ゆえに定理 12.11 を適用して (i) を得る。(ii) を示すのは演習問題とする。 \square

12.22 演習問題. 定理 12.21(ii) を示せ。(ヒント 関数 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \mu((0, t] \times (a, b])$ は右連続かつ $f(t+s) = f(t) + f(s) \forall t, \forall s$ を満たすことをまず示せ。)

平行移動はユークリッド距離を保存する。これが Lebesgue 測度の平行移動不変性を導くのだが、その観点からの証明は更に高度な概念に依存するのでここでは割愛する。さて高次元空間では別のタイプの距離を保存する変換が存在する。それは回転である。2 次元 Lebesgue 測度が回転不変(rotation invariant)であることを平行移動不変性と関連づけて示そう。

12.23 定理. 2 次元直交写像 φ に対して $\lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = \lambda^{(2)}(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が成り立つ。

証明. \mathbb{R}^2 上の測度 $A \mapsto \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A))$ は Radon 測度である。他方

$$\varphi^{-1}(A+t) = \varphi^{-1}(A) + \varphi^{-1}(t)$$

であるから定理 12.21(i) を適用して

$$\lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A+t)) = \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall t \in \mathbb{R}^2$$

を得る。従って定理 12.21(ii) の仮定が満たされる。よって

$$\exists c \geq 0 \text{ s.t. } \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = c\lambda^{(2)}(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

特に、 $\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとすると、開集合 $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ については

$$(12.24) \quad \varphi^{-1}(A) = A, 0 < \lambda^{(2)}(A) < +\infty$$

なので $c = 1$ を得る。 \square

12.25 演習問題. (12.24) を示せ。

13 Dynkin 族定理と直積測度の構造

直積測度の構造をその断面から観察するのが Fubini の定理である。それに向けてのお膳立てを行うのがこの節の目的である。可測性に関する概念が多変数になることにより込み入ったものになるが、結局は直積という概念から逸脱するものではないことが判明する。この節の最重点は補題 13.11 である。通常は、単調族の概念を利用することが多いが、ここでは確率論において様々な場面で利用される Dynkin 族定理を紹介する。

前提

(\mathcal{B}_1, μ_1) を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -有限な測度、 (\mathcal{B}_2, μ_2) を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ -有限な測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 σ -加法族を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ 上の一意的な測度である。系 12.9 を参照

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

ここでは 0 と ∞ の積は 0 と約束している。

13.1 補題. $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ とする。

- (i) 各 $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto 1_A(x, y)$ は \mathcal{B}_2 -可測である。
- (ii) 各 $y \in \mathbb{R}^{d(2)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1_A(x, y)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。

証明. (i) 次が \mathbb{R}^d 上の σ -加法族でしかも $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含むことを示すのは演習問題とする。

$$\mathcal{B} := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) : y \mapsto 1_A(x, y) \text{ } \mathcal{B}_2\text{-可測 } \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}\}.$$

そのようなものの最小が $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ なので $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ すなわち

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Rightarrow y \mapsto 1_A(x, y) \text{ } \mathcal{B}_2\text{-可測 } \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。(ii) を示すには x, y の役割を入れ替えればよい。 □

13.2 演習問題. 補題 13.1 の証明に登場した \mathcal{B} が $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む σ -加法族であることを示せ。

13.3 系. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とする。

- (i) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto 1_A(x, y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である。
- (ii) 各 $y \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1_A(x, y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である。

証明. 系 12.14(i) と補題 13.1 から従う。 □

今までの経験からすると次の集合族は $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む σ -加法族であるように思われる。

$$\{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) \text{ は } \mathcal{B}_1\text{-可測}\}.$$

しかしこれがかなり手強いしろものでその証明を与える補題 13.11 は Fubini の定理において中心をなすものとなる。見通しよく議論するには新しい概念を導入する必要がある。

13.4 定義. \mathcal{D} を \mathbb{R}^d の部分集合族とする。それが条件

- (i) $\emptyset \in \mathcal{D}$.
- (ii) $A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, A \supset B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$.
- (iii) $A_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

を満たすとき *Dynkin 族*(Dynkin system) をなすという。

任意の \mathbb{R}^d 上の σ -加法族は Dynkin 族である。付帯条件を付けると逆も正しい。

13.5 補題. \mathcal{D} を \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族とする。

- (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ かつ $A \cap B \in \mathcal{D} \forall A \in \mathcal{D} \forall B \in \mathcal{D}$ なら \mathcal{D} は σ -加法族である。
- (ii) 任意の $B \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\}$ は Dynkin 族である。

証明. (i) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ と Dynkin 族の条件 (ii) より

$$A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c = \mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{D}.$$

次に上のことと仮定 $A \cap B \in \mathcal{D} \forall A \in \mathcal{D} \forall B \in \mathcal{D}$ より

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}.$$

従って $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{D}$ である。他方 $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ が成り立つので、Dynkin 族の条件 (iii) より

$$A_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \in \mathcal{D}.$$

(ii) まず $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{D}$ である。次に $A_1 \cap B \in \mathcal{D}, A_2 \cap B \in \mathcal{D}, A_1 \supset A_2$ とすると

$$(A_1 \setminus A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) \in \mathcal{D}$$

である。最後に $A_n \cap B \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ とすると

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \mathcal{D}$$

が導かれる。よって Dynkin 族の条件がすべて確認できた。 □

補題 11.5 でのべたように \mathbb{R}^d 上の σ -加法族たちの共通部は σ -加法族である。これと同じことが Dynkin 族についてもいえる。

- 13.6 補題. (i) \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族たち \mathcal{D}_α に対しそれらの共通部 $\bigcap_\alpha \mathcal{D}_\alpha$ も Dynkin 族である。
- (ii) \mathbb{R}^d の部分集合の族 \mathcal{A} に対し \mathcal{A} を含む \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族たちに最小のものが存在する。

証明の実行は補題 11.5 のそれと同じすじなので演習問題とする。

13.7 演習問題. 補題 13.6 を示せ。

13.8 定義. \mathcal{A} を \mathbb{R}^d の部分集合の族とする. \mathcal{A} を含む \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族で最小のものを \mathcal{A} で生成される Dynkin 族と呼ぶ.

13.9 補題. \mathcal{C} を \mathbb{R}^d の部分集合族で次の条件を満たすものとする.

$$A \cap B \in \mathcal{C} \quad \forall A \in \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{C}.$$

\mathcal{C} で生成される \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族を \mathcal{D} とすると $A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall A \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}$ が成り立つ.

証明. \mathcal{D} は Dynkin 族なので補題 13.5(ii) および補題 13.6(i) により

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{C}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D}\}$$

は \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族である. \mathcal{C} に対する条件と関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ により

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{C}.$$

従って集合族 \mathcal{D}_1 は \mathcal{C} を含む Dynkin 族である. \mathcal{D} は \mathcal{C} で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ すなわち $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{C}$ を得る. これは次と同値である.

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}.$$

A, B の役割を入れ替えてみよう.

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}.$$

よって次の集合族は \mathcal{C} を含む.

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \text{Sbset}(\mathbb{R}^d) : A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}\}.$$

しかも \mathcal{D}_1 に対するのと同じ根拠により集合族 \mathcal{D}_2 は Dynkin 族である. \mathcal{D} は \mathcal{C} で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_2$ すなわち $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}$ を得る. \square

次は Dynkin 族定理と呼ばれる.

13.10 定理. \mathbb{R}^d の部分集合族 \mathcal{C} が条件 $A \cap B \in \mathcal{C} \quad \forall A \in \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{C}$ を満たすとする. このとき集合族 $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ で生成される \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族は σ -加法族 $\sigma(\mathcal{C})$ に等しい.

証明. 集合族 $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ も条件 $A \cap B \in \tilde{\mathcal{C}} \quad \forall A \in \tilde{\mathcal{C}} \quad \forall B \in \tilde{\mathcal{C}}$ を満たす. 従って補題 13.9 により $\tilde{\mathcal{C}}$ で生成される \mathbb{R}^d 上の Dynkin 族 \mathcal{D} は条件

$$A \cap B \in \mathcal{D} \quad \forall A \in \mathcal{D} \quad \forall B \in \mathcal{D}$$

を満たすことになる. しかも $\mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ なので補題 13.5(i) により \mathcal{D} は σ -加法族である. またそれは \mathcal{C} を含む. $\sigma(\mathcal{C})$ は \mathcal{C} で生成される σ -加法族であるから $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ を得る.

他方, σ -加法族は Dynkin 族である. よって $\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ を含む Dynkin 族となる. \mathcal{D} は $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ で生成される Dynkin 族であるから $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$ を得る. \square

記号

$\text{proj}_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(1)}, \text{proj}_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(2)}$ は次で定義される写像を表す。

$$\text{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \quad \text{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

警告

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ なら $\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1, \text{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2, A = (\text{proj}_1 A) \times (\text{proj}_2 A)$ であるが、一般には $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ から $\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$ や $A = (\text{proj}_1 A) \times (\text{proj}_2 A)$ は従わない。

13.11 補題. $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ なら関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。

証明. (\mathcal{B}_2, μ_2) は σ -有限であるから補題 11.3 により $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 \mathcal{B}_2 -分割 Δ で

$$\mu_2(J) < +\infty \quad \forall J \in \Delta$$

を満たすものが存在する。次の集合族を考察する。

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) \text{ } \mathcal{B}_1\text{-可測 } \forall J \in \Delta\}.$$

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ としよう。このとき補題 12.2 により

$$1_A(x, y) = 1_{\text{proj}_1 A}(x) 1_{\text{proj}_2 A}(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{d(2)} \quad \text{かつ} \quad \text{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2$$

であるから

$$\int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) = 1_{\text{proj}_1 A}(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J 1_{\text{proj}_2 A} \mu_2 = 1_{\text{proj}_1 A}(x) \mu_2(J \cap \text{proj}_2 A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}.$$

従って $\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$ より各 $J \in \Delta$ に対し $x \mapsto \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。即ち

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}.$$

次に $A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, A \subset B$ としよう。このとき $1_B - 1_A = 1_{B \setminus A}$ である。さて

$$0 \leq \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) \leq \int_J 1_B(x, y) \mu_2(dy) \leq \mu_2(J) < +\infty \quad \forall J \in \Delta$$

であるから定理 4.10 を適用して

$$\int_J 1_{B \setminus A}(x, y) \mu_2(dy) = \int_J 1_B(x, y) \mu_2(dy) - \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) \quad \forall J \in \Delta$$

を得る。右辺の各項は $A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}$ より x に関して \mathcal{B}_1 -可測である。従って

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

最後に $A_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると定理 3.18 より

$$\int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) = \int_J \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_{A_n}(x, y) \mu_2(dy) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_J 1_{A_n}(x, y) \mu_2(dy) \quad \forall J \in \Delta$$

が導かれる。各関数 $x \mapsto \int_J 1_{A_n}(x, y) \mu_2(dy)$ は $A_n \in \mathcal{D}$ より \mathcal{B}_1 -可測である。よって補題 5.1 により関数 $x \mapsto \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy)$ ($A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$) の \mathcal{B}_1 -可測性を得る。従って

$$A_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

以上より \mathcal{D} は $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ をふくむ Dynkin 族である。他方、集合族 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ は定理 13.10 の条件を満たしかつ $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ であるから

$$\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \text{ で生成される Dynkin 族}$$

従って $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{D}$ すなわち

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Rightarrow x \mapsto \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) \text{ } \mathcal{B}_1\text{-可測 } \forall J \in \Delta.$$

$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ とする。 Δ は $\mathbb{R}^{d(2)}$ の可算 \mathcal{B}_2 -分割なので定理 5.5 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) = \sum_{J \in \Delta} \int_J 1_A(x, y) \mu_2(dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$$

を得る。従って $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。 □

13.12 系. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ なら関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} 1_A(x, y) \mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である。

証明. 系 12.14(i) と補題 13.11 から従う。 □

次は *Fubini* の定理で骨格を形成するが、これを述べるには補題 13.11 が不可欠である。

13.13 定理. $\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2.$

証明. 補題 13.11 のおかげで関数 $\mu : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を次で定義することができる。

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx).$$

その定義から直ちに $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ かつ $\mu(\emptyset) = 0$ である。 Δ を $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の可算 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -分割とする。このとき

$$1_A(x, y) = \sum_{J \in \Delta} 1_J(x, y)$$

である。まず補題 5.4 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) = \sum_{J \in \Delta} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J(x, y) \mu_2(dy)$$

を得る。もう一度補題 5.4 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \sum_{J \in \Delta} \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_J(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx)$$

が導かれる。即ち μ は σ -加法的である。ゆえに

$(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu)$ は \mathbb{R}^d 上の測度である。

次に $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ としよう。このとき補題 12.2 より

$$\text{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1, \text{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2, 1_A(x, y) = 1_{\text{proj}_1 A}(x) 1_{\text{proj}_2 A}(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)} \quad y \in \mathbb{R}^{d(2)}$$

であるから次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_A(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \mu_1(\text{proj}_1 A) \mu_2(\text{proj}_2 A) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A).$$

$(\mathcal{B}_1, \mu_1), (\mathcal{B}_2, \mu_2)$ は σ -有限であるから系 12.9 により $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ が導かれる。 □

記号

λ を 1 次元 Lebesgue 測度、 $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。

13.14 系. $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x, y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \lambda^{(2)}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$

証明. 系 12.14 と定理 13.13 から従う。 □

定理 13.13 の典型的な応用例をあげる。まずはおなじみの縦線領域の面積公式である。

13.15 例. $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を \mathcal{B} 可測関数、 μ を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ 上の σ -有限測度とすると次が成り立つ。
 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ かつ

$$(\mu \otimes \lambda)(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu$$

証明. $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることは次により確認できる。

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}: q > 0} (\{x : f(x) > q\} \times (0, q])$$

あとは $1_A(x, y) = 1_{(0, f(x))}(y)$ に注意して定理 13.13 を適用すればよい。 □

系 12.14(i) により $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを確認しておこう。

13.16 例. μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の σ -有限測度で条件 $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ を満たすものとする。このとき集合 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に属しかつ $(\mu \otimes \mu)(D) = 0$ である。

証明. D^c は \mathbb{R}^2 の開集合であるから補題 12.15 により $D^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。 D の定義により $1_D(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}} 1_D(x, y) \mu(dy) = \mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

定理 13.13 を適用して $(\mu \otimes \mu)(D) = 0$ を得る。□

補題 12.19(i) より、連続写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の合成 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測であることを思い出そう。

13.17 補題. $\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + cy, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A) \ \forall c \in \mathbb{R} \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

証明. 任意に $c \in \mathbb{R}$ を固定して、写像 $\varphi : (x, y) \mapsto (x + cy, y)$ を導入する。このとき

$$1_A(x + cy, y) = 1_{\varphi^{-1}(A)}(x, y).$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と仮定する。補題 12.19(i) より $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ であるから

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + cy, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\varphi^{-1}(A)}(x, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A))$$

と議論が展開する。補題 12.19(ii) によれば右辺は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上の測度を定義する。他方、系 13.14 を中辺に適用すると

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + cy, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\varphi^{-1}(A)}(x, y) \lambda(dx) \right) \lambda(dy).$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上定義された測度 μ を $\lambda^{(2)}$ と比較するというのがこれからの方針である。このままでは先に進まないのので、 A に簡単な形を仮定する。1次元半開区間 I, J に対し

$$1_{\varphi^{-1}(I \times J)}(x, y) = 1_{I \times J}(x + cy, y) = 1_I(x + cy) 1_J(y) = 1_{I - cy}(x) 1_J(y).$$

よって

$$\mu(I \times J) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{I - cy}(x) 1_J(y) \lambda(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(I - cy) 1_J(y) \lambda(dy).$$

定理 11.16 よれば $\lambda(I - cy) = \lambda(I)$ と評価される。従って

$$\mu(I \times J) = \lambda(I) \lambda(J)$$

となり $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 上の測度 μ は定理 12.11 の仮定を満たす。よって

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + cy, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \mu(A) = \lambda^{(2)}(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して成り立つことが導けた。□

13.18 例. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が λ 零集合なら $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}$ は $\lambda^{(2)}$ 零集合である。

証明. B を λ 零集合とする. $c = 1$, $A = B \times \mathbb{R}$ として補題 13.17 を適用する.

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{B \times \mathbb{R}}(x + y, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(B \times \mathbb{R}) = \lambda(B)\lambda(\mathbb{R}).$$

このとき $1_{B \times \mathbb{R}}(x + y, y) = 1 \Leftrightarrow x + y \in B$ であり $\lambda(B) = 0$ であるから

$$\lambda^{(2)}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) = 0.$$

したがって $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}$ は $\lambda^{(2)}$ 零集合である. □

定理 12.23 によれば 2 次元 Lebesgue 測度は回転不変である. もう少し一般に 2 次元 Lebesgue 測度を保存する線形写像について調べよう. 以下に述べるように行列式が 1 または -1 であるような正則線形写像に関して 2 次元 Lebesgue 測度は不変である.

13.19 定理. 2 次元正則線形写像 φ に対して次が成り立つ.

$$\lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A) / |\det \varphi| \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

証明. 基本変形を使うと 2 次元正則行列は次の 3 タイプの行列の積で表すことができる.

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ただし } c \neq 0$$

写像 φ が上の何れかの表現行列を持つ場合に命題を示せばよいのだがその理由付けは演習問題に託す. さてそれぞれの行列式は $1, c, -1$ であるから証明すべきは

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x + cy, y) \lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A), \\ \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx, y) \lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A) / |c|, \\ \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(y, x) \lambda^{(2)}(dxdy) &= \lambda^{(2)}(A). \end{aligned}$$

第 1 番目はまさに補題 13.17 である. 第 2 番目について検討しよう. 方針は 2 次元 Lebesgue 測度の一意性への帰着である. A に簡単な形を仮定する. 1 次元半開区間 $(a, b]$ と J に対し

$$1_{(a,b] \times J}(cx, y) = 1_{(a,b]}(cx) 1_J(y) = \begin{cases} 1_{(a/c, b/c]}(x) 1_J(y) & c > 0 \\ 1_{[b/c, a/c)}(x) 1_J(y) & c < 0 \end{cases}.$$

$c > 0$ なら $\lambda((a/c, b/c]) = (b - a)/c$ であり $c < 0$ なら $\lambda([b/c, a/c)) = (b - a)/|c|$ である. いずれにしても次が成り立つ.

$$|c| \int_{\mathbb{R}^2} 1_{(a,b] \times J}(cx, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda((a, b]) \lambda(J).$$

定理 12.11 を測度 $A \mapsto |c| \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx, y) \lambda^{(2)}(dxdy)$ に適用して

$$|c| \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(cx, y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

第 3 番目については演習問題とする. □

13.20 演習問題. 定理 13.19 の証明を完結させよ。とくに 3 タイプの表現行列を持つ場合に帰着できる理由を重点的に考察せよ。

次に述べる平行四辺形の面積公式は、直積測度の構造をその断面から観察するという Fubini の定理が生み出す帰結のうちでも典型的なものである。

13.21 例. 独立ベクトルの組 ${}^t(a, c), {}^t(b, d) \in \mathbb{R}^2$ のはる平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ である。

証明. 独立性により $ad - bc \neq 0$ である。組 ${}^t(a, c), {}^t(b, d)$ のはる平行四辺形は

$$A := \{{}^t(x, y) : \exists s \in (0, 1] \exists t \in (0, 1] \text{ s.t. } x = sa + tb, y = sc + td\}$$

と表せる。ここで表現行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を持つ線形写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を φ とすると

$$A = \varphi((0, 1] \times (0, 1])$$

が成り立つ。 φ は単写であることに注意して定理 13.19 を適用する。

$$\lambda^{(2)}(A) / |\det \varphi| = \lambda^{(2)}(\varphi^{-1}(A)) = \lambda^{(2)}((0, 1] \times (0, 1]) = 1.$$

$\det \varphi = ad - bc$ であるから $\lambda^{(2)}(A) = |ad - bc|$ が導かれた。□

この節では Dynkin 族定理を直積測度の構造を調べるのに活用したが、それ以外にも広い応用例を持つ。一意性証明への適用が典型的であるので、その一つを紹介しておく。

13.22 定理. \mathcal{C} を \mathbb{R}^d の部分集合族で条件 $A \cap B \in \mathcal{C} \forall A \in \mathcal{C} \forall B \in \mathcal{C}$ を満たすもの、 μ を $\sigma(\mathcal{C})$ 上の測度、 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ 可積分関数とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_A f \mu = \int_A g \mu \quad \forall A \in \mathcal{C}, \int_{\mathbb{R}^d} f \mu = \int_{\mathbb{R}^d} g \mu \Rightarrow f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明. 仮定により次の集合族は $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\} \subset \mathcal{D}$ を満たす。また $\emptyset \in \mathcal{D}$ は自明である。

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \int_A f \mu = \int_A g \mu\}.$$

$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{D}, A \subset B$ としよう。このとき $1_B - 1_A = 1_{B \setminus A}$ である。定理 4.10 を適用して

$$\int_{B \setminus A} f \mu = \int_B f \mu - \int_A f \mu = \int_B g \mu - \int_A g \mu = \int_{B \setminus A} g \mu$$

即ち $B \setminus A \in \mathcal{D}$ を得る。次に $A_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ とすると定理 5.7 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_A f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_n} f \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_n} g \mu = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A g \mu,$$

ここで $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とした、即ち $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ が導かれる。以上より \mathcal{D} は $\mathcal{C} \cup \{\mathbb{R}^d\}$ をふくむ Dynkin 族である。定理 13.10 より

$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ で生成される Dynkin 族 $\subset \mathcal{D}$

関係 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ は次を意味する。

$$\int_A f \mu = \int_A g \mu \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{C}).$$

系 6.26 を適用して $f = g$ μ -a.e. を得る。 □

次の例 13.25 に述べる命題は変分法の基本補題と呼ばれることがある。幾分の準備をする。

13.23 定義. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数とする。各 $a \in \mathbb{R}$ に対して $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して f が区間 $(a - \delta, a + \delta)$ 上で λ 可積分となると f は局所可積分 (locally integrable) であるという。

連続関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は補題 11.11 により $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。また局所可積分でもあることを注意しておこう。

記号

台が有界な連続関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を $C_0(\mathbb{R})$ という記号で表す。

13.24 演習問題. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は任意の有界閉区間上で λ 可積分であり従って任意の $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ に対し積 $f\phi$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 可積分であることを示せ。

13.25 例. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi \lambda = \int_{\mathbb{R}} g\phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow f = g \quad \lambda\text{-a.e.}$$

証明. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とする。次のような関数列を導入する。

$$\phi_n(x) := \min\{n \max\{x - a, 0\}, n \max\{b - x, 0\}, 1\}$$

すぐ分かるように $\phi_n \in C_0(\mathbb{R}), 0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}, \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n = 1_{(a,b)}$ が成り立つ。他方、 $f\phi_n = 1_{(a,b)}f\phi_n, g\phi_n = 1_{(a,b)}g\phi_n$ であることにも着目しよう。仮定により

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi_n \lambda = \int_{\mathbb{R}} g\phi_n \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

である。さて $1_{(a,b)}f$ および $1_{(a,b)}g$ は可積分であるので、これらを優関数に選んで定理 5.7 を適用すると次のように収束することが分かる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f\phi_n \lambda = \int_{\mathbb{R}} f 1_{(a,b)} \lambda = \int_{(a,b)} f \lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g\phi_n \lambda = \int_{(a,b)} g \lambda.$$

従って、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して次が導ける。

$$\int_I f 1_{(-k,k)} \lambda = \int_{I \cap (-k,k)} f \lambda = \int_{I \cap (-k,k)} g \lambda = \int_I g 1_{(-k,k)} \lambda \quad \forall I \text{ 有界開区間, } \emptyset \text{ または } \mathbb{R}$$

有界開区間全体で生成される σ 加法族は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に等しくまた開区間どうしの共通部は開区間または空集合であるので、定理 13.22 により $f1_{(-k,k)} = g1_{(-k,k)}$ λ -a.e. を得る。ここで

$$\{x \in \mathbb{R} : f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f1_{(-k,k)} \neq g1_{(-k,k)}\}.$$

右辺は λ 零集合の可算合併であるから、系 6.20(i) を適用して λ 零集合であることが分かる。従って $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f \neq g\}) = 0$ 即ち $f = g$ λ -a.e. が結論づけられる。□

記号

$$C_0^r(\mathbb{R}) := \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \text{ 上で } C^r \text{ 級}\}$$

13.26 演習問題. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数、 $r \in \mathbb{N}$ とする。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi \lambda = \int_{\mathbb{R}} g\phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}) \Rightarrow f = g \quad \lambda\text{-a.e.}$$

が成り立つことを例 13.25 の証明法を改良して示せ。ヒント：次で定義される関数 ψ は C^r 級である。ただし B は beta 関数である。

$$\psi(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{B(r+1, r+1)} \int_{(0,x]} y^r (1-y)^r \lambda(dy) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$a < b$ が与えられたとして関数列 $\phi_n(x) := \psi(n(x-a))\psi(n(b-x))$ を考察せよ。

14 Fubini-Tonelli の定理と単調収束定理

非負値可測関数について Fubini の定理を紹介する。ここでは単調収束定理が果たす役割を中心に考察を進めていく。

前提

(\mathcal{B}_1, μ_1) を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -有限な測度、 (\mathcal{B}_2, μ_2) を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ -有限な測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。特別な場合として λ を 1 次元 Lebesgue 測度、 $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 σ -加法族を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ 上の一意的な測度である。

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

ここでは 0 と ∞ の積は 0 と約束している。

14.1 補題. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測とする。

- (i) 各 $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto f(x, y)$ は \mathcal{B}_2 -可測である。
- (ii) 各 $y \in \mathbb{R}^{d(2)}$ に対して関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f(x, y)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。

証明. (i) $a \in \mathbb{R}$ を任意に固定する。 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 可測性により

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d : f(x, y) < a\} \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2.$$

ここで $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ を固定する。補題 13.1(i) により $y \mapsto 1_A(x, y)$ は \mathcal{B}_2 -可測であるから

$$\{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : f(x, y) < a\} = \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : 1_A(x, y) \geq 1\} \in \mathcal{B}_2.$$

よって $y \mapsto f(x, y)$ は \mathcal{B}_2 -可測である。(ii) を示すには x, y の役割を入れ替えればよい。 \square

14.2 系. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -可測とする。

- (i) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である。
- (ii) 各 $y \in \mathbb{R}$ に対して関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である。

証明. 系 12.14 と補題 14.1 から従う。 \square

非負値可測関数については *Fubini* の定理、*Tonelli* の定理あるいは *Fubini-Tonelli* の定理と呼ぶべきかもしれない、は非常に明解である。

14.3 定理. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は非負値かつ $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測とする。

- (i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu_1 \otimes \mu_2.$

証明. まず、 f が非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 単関数である場合を検討する。このとき

$$f = \sum_{z \in \text{Image} f} z 1_{f^{-1}\{z\}}$$

と書け、右辺は有限和である。定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) = \sum_{z \in \text{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(x, y) \mu_2(dy).$$

補題 13.11 によれば、右辺は \mathcal{B}_1 -可測関数の有限和を定義する。従って補題 4.1 より関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)$$

の \mathcal{B}_1 -可測性を得る。定理 4.4 と補題 13.13 を適用して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) &= \sum_{z \in \text{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\ &= \sum_{z \in \text{Image} f} z (\mu_1 \otimes \mu_2)(f^{-1}\{z\}) = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu_1 \otimes \mu_2. \end{aligned}$$

これで単関数の場合の証明が完成した。一般の場合の議論に移る。補題 3.17 によれば

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d.$$

を満たす非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 単関数の列 f_n が存在する。単関数についての考察から

$$\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x, y) \mu_2(dy)$$

は \mathcal{B}_1 -可測である。よって定理 3.18 と補題 5.1 を適用して関数

$$\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x, y) \mu_2(dy) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)$$

の \mathcal{B}_1 可測性を得る。 μ_1 についての積分に定理 3.18 を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f_n(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx).$$

単関数についての考察から右辺の累次積分は $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu_1 \otimes \mu_2$ に等しい。従って

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f \mu_1 \otimes \mu_2.$$

もちろん 2 番目の等号は定理 3.18 から導かれる。 □

14.4 系. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は非負値かつ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測とする。

(i) 関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。

(ii) $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^2} f \lambda^{(2)}.$

証明. 系 12.14 と定理 14.3 から従う。 □

定理 14.3 の証明に用いた論法、すなわち単関数について証明できればあとは単調収束定理によって処理できるという手順、は非常に有効なものであり、スタンダードマシン(standard machine)と呼ぶ研究者もいる。じつは定理 5.5(ii) の証明においてこの論法が既に登場していたのである。是非確認しておこう。論法に慣れるため更にくいつか例をあげておく。

まず線形写像に対する変数変換公式を証明する。ここで連続写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測関数 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の合成は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測であることを思いだそう。ついでに言うと連続写像 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ の合成は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。補題 12.19(i) の理解度を試すために上を証明してみるとよいだろう。

14.5 定理. 非負値かつ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測な関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \frac{1}{|\det \varphi|} \int_{\mathbb{R}^2} f \lambda^{(2)} \quad \forall \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ 正則線形}$$

特に行列式が 1 または -1 であるような正則線形写像は Lebesgue 積分を保存する。

証明. まず、 f が非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 単関数である場合を検討する。このとき

$$f = \sum_{z \in \text{Image} f} z 1_{f^{-1}\{z\}}, \quad f \circ \varphi = \sum_{z \in \text{Image} f} z 1_{f^{-1}\{z\}} \circ \varphi$$

と書け、右辺は有限和である。定理 4.4 により

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \sum_{z \in \text{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy).$$

右辺に定理 13.19 を適用して

$$\sum_{z \in \text{Image} f} z \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} 1_{f^{-1}\{z\}}(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \sum_{z \in \text{Image} f} z \lambda^{(2)}(f^{-1}\{z\}) / |\det \varphi|.$$

よって次が導出でき単関数の場合の証明が完成した。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \frac{1}{|\det \varphi|} \int_{\mathbb{R}^2} f \lambda^{(2)}.$$

一般の場合を考察する。補題 3.17 によれば

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

を満たす非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 単関数の列 f_n が存在する。単関数についての考察から

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(\varphi(x, y)) \lambda^{(2)}(dxdy) = \frac{1}{|\det \varphi|} \int_{\mathbb{R}^2} f_n \lambda^{(2)}.$$

両辺に定理 3.18 を適用して結論が導かれる。 □

次は例 10.16(i) で紹介済みのものである。定理 14.5 の証明方針に従って別証明を与えよ。

14.6 演習問題. λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。非負値かつ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測な関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $a, c \in \mathbb{R}$ ただし $c \neq 0$ に対して $\int_{\mathbb{R}} f(cx + a) \lambda(dx) = \frac{1}{|c|} \int_{\mathbb{R}} f \lambda$ が成り立つことを示せ。

14.7 定理. 関数 $f : \mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は \mathcal{B}_1 -可測、関数 $g : \mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は \mathcal{B}_2 -可測とする。

(i) 関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測である。

(ii) f, g とともに非負値であるなら

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y) \mu_1 \otimes \mu_2(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f \mu_1 \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g \mu_2$$

証明. (i) まず関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \mapsto f(x)$ が $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測であることを確かめる。関数 f の \mathcal{B}_1 -可測性により $\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : f(x) < a\} \in \mathcal{B}_1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ である。よって $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の定義により

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} = \{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : f(x) < a\} \times \mathbb{R}^{d(2)} \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

同様にして関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto g(y)$ の $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測性もわかる。従って補題 4.14 を適用して $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ が $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測であることが導かれる。

(ii) (i) と定理 14.3 から明らかと言うわけではない。何が問題かと言えば、 $f(x) = +\infty$ という可能性があるからである。よって

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x)g(y) \mu_2(dy) = f(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g(y) \mu_2(dy)$$

が $f(x) = +\infty$ であっても成り立つことを確かめる必要がある。ここで重要なのは積についての約束 $0\infty = 0$ である。この約束に従うと

$$\begin{aligned} \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : g(y) > 0\} &= \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : f(x)g(y) = +\infty\}, \\ \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : g(y) = 0\} &= \{y \in \mathbb{R}^{d(2)} : f(x)g(y) = 0\} \end{aligned}$$

である。後者は $\mathbb{R}^{d(2)}$ に関して前者の補集合である。補題 4.17(i) を適用して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x)g(y) \mu_2(dy) &= \int_{\{g>0\}} f(x)g(y) \mu_2(dy) + \int_{\{g=0\}} f(x)g(y) \mu_2(dy) \\ &= +\infty\mu_2(\{y : g(y) > 0\}) + 0\mu_2(\{y : g(y) = 0\}) \end{aligned}$$

まず $\mu_2(\{y : g(y) > 0\}) = 0$ と仮定する。このとき補題 4.12 を適用して

$$f(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g(y) \mu_2(dy) = +\infty 0 = 0 = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x)g(y) \mu_2(dy)$$

次に $\mu_2(\{y : g(y) > 0\}) > 0$ と仮定する。補題 4.12 より $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g \mu_2 > 0$ であるから

$$f(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g(y) \mu_2(dy) = +\infty = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x)g(y) \mu_2(dy)$$

同様にして $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g \mu_2 = +\infty$ の場合も含めて

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f(x) \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g(y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g(y) \mu_2(dy) \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f(x) \mu_1(dx)$$

が成り立つことを確かめられる。 □

14.8 系. 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はともに $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測とする。

(i) 関数 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測である。

(ii) f, g とともに非負値であるなら

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} f \lambda \int_{\mathbb{R}} g \lambda.$$

証明. 系 12.14 と定理 14.7 から従う。 □

補題 12.18 により連続関数 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測であることを確認しておこう。

14.9 例. $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(dx) \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \lambda(dy).$

証明. 左の等号は系 14.8 から従う。例 10.16(i) によれば、 $x \neq 0$ に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-x^2y^2} \lambda(dy) = \frac{1}{|x|} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} \lambda(dy)$$

$\lambda(\{0\}) = 0$ であるから、系 4.18(ii) により

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-x^2y^2} \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-x^2-x^2y^2} \lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

いよいよ系 14.4 を適用する。右辺は次に等しい。

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x| e^{-x^2-x^2y^2} \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-x^2-x^2y^2} \lambda(dx) \right) \lambda(dy)$$

$x \mapsto |x| e^{-x^2(1+y^2)}$ の原始関数の一つは次で与えられ、それは明らかに有界である。

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - e^{-x^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)} & x \geq 0 \\ \frac{e^{-x^2(1+y^2)} - 1}{2(1+y^2)} & x \leq 0 \end{cases}$$

補題 10.3(ii) にある判定条件と定理 10.1(ii) により累次積分が

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-x^2(1+y^2)} \lambda(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} \lambda(dy)$$

と評価される。 □

次は *gamma* 関数と *beta* 関数の関係としてよく知られているものである。

14.10 例. $s, t > 0$ とする。非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -可測関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{(0,+\infty) \times (0,+\infty)} f\left(x+y, \frac{y}{x+y}\right) e^{-x} x^{s-1} e^{-y} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \\ &= \int_{(0,+\infty) \times (0,1)} f(x,y) e^{-x} x^{s+t-1} (1-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \end{aligned}$$

が成り立つ。とくに $\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)B(s,t)$ である。 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

証明. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$ とおく。 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。各 $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y) f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda(dx) \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_{(y,+\infty)} f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda(dx) & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。一方、例 10.16(i) によれば、 $y > 0$ のとき右辺は次に等しい。

$$\int_{(0,+\infty)} f\left(x+y, \frac{y}{x+y}\right) e^{-(x+y)} x^{s-1} y^{t-1} \lambda(dx)$$

従って系 14.4(ii) を適用することにより

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x, y) f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \\ &= \int_{(0,+\infty) \times (0,+\infty)} f\left(x+y, \frac{y}{x+y}\right) e^{-x} x^{s-1} e^{-y} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \end{aligned}$$

を得る。次に各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} 1_A(x, y) f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda(dy) \\ &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_{(0,x)} f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda(dy) & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。また例 10.16(i) によれば、 $x > 0$ のとき右辺は次に等しい。

$$\int_{(0,1)} f(x, y) e^{-x} (x-xy)^{s-1} (xy)^{t-1} x \lambda(dy) = \int_{(0,1)} f(x, y) e^{-x} x^{s+t-1} (1-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda(dy)$$

である。従って系 14.4(ii) を適用することにより

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x, y) f\left(x, \frac{y}{x}\right) e^{-x} (x-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \\ &= \int_{(0,+\infty) \times (0,1)} f(x, y) e^{-x} x^{s+t-1} (1-y)^{s-1} y^{t-1} \lambda^{(2)}(dxdy) \end{aligned}$$

が導かれる。以上をあわせて目的とする公式を得る。ここで $f = 1$ と特定して系 14.8(ii) を適用すると $\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)B(s, t)$ が導かれる。□

Fubini の定理というテーマからはずれるが単調収束定理の有効利用という意味で例 14.9 と関連して円の面積の一つの表現を見ておこう。

14.11 例. $\lambda^{(2)}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \lambda^{(2)}(dxdy)$.

証明. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $A(t) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq t\}$ とおく。線形写像 $(x, y) \mapsto (x/\sqrt{t}, y/\sqrt{t})$ に定理 13.19 を適用することにより次を得る。

$$\lambda^{(2)}(A(t)) = \lambda^{(2)}(\sqrt{t}A(1)) = t\lambda^{(2)}(A(1)).$$

したがって $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ ただし $s < t$ に対して

$$(*) \quad \lambda^{(2)}(\{(x, y) : s < x^2 + y^2 \leq t\}) = \lambda^{(2)}(A(t)) - \lambda^{(2)}(A(s)) = (t-s)\lambda^{(2)}(A(1)).$$

次に $n, k \in \mathbb{N}$ に対して $B(n, k) := \{(x, y) : (k-1)/2^n < x^2 + y^2 \leq k/2^n\}$ とおく。

$$f_n(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/2^n} 1_{B(n,k)}(x, y) \text{ は } n \text{ について非減少かつ } \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

が $(x, y) \neq (0, 0)$ である限り成り立つ。 $\lambda^{(2)}(\{(0, 0)\}) = 0$ なので

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^2} f_n \lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \lambda^{(2)}(dxdy)$$

が単調収束定理 (例 6.22) により得られる。さて $(*)$ を使うと

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n \lambda^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/2^n} \lambda^{(2)}(B(n, k)) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/2^n} \frac{1}{2^n} \lambda^{(2)}(A(1))$$

単調収束定理を右辺に適用すると原始関数によって評価できる積分が得られる。

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/2^n} \frac{1}{2^n} = \int_{(0, +\infty)} e^{-x} \lambda(dx) = 1.$$

従って $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(A(1))$ である。 $\lambda^{(2)}(\{(0, 0)\}) = 0$ により結論を得る。 \square

14.12 注意. 本来、例 14.11 は極座標 (polar coordinate) との関連で論じるのが自然な題材である。しかしながら必ずしも線形でない写像に関する変数変換公式はきわめて厄介である。その遺漏のない証明を与えるには十分な段取りを整える必要があるので別の機会へ回すことにしたい。その一方、非負値 Borel 可測関数 $f : [0, +\infty) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + y^2) \lambda^{(2)}(dxdy) = \lambda^{(2)}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}) \int_{[0, +\infty)} f \lambda$$

が成り立つのを示すのはそれほど難しくはない (連続写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ が成り立つという補題 12.19(i) の類似命題を使う)。

脱線ついでに例 14.9 の関連事項として次の演習問題にふれておく。解析学においてきわめて重要な役割を果たすので是非解いておくことを勧める。

14.13 演習問題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数であって $a \in \mathbb{R}$ において連続なものとする。このとき $t > 0$ が 0 に近づく極限において $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-(x-a)^2/t} \lambda(dx) / \sqrt{t}$ は $\sqrt{\pi} f(a)$ に収束することを示せ。

15 Fubini の定理とその応用

ここでは almost everywhere の概念との関わりを中心に考察を進めていく。

前提

(\mathcal{B}_1, μ_1) を $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上の σ -有限な測度、 (\mathcal{B}_2, μ_2) を $\mathbb{R}^{d(2)}$ 上の σ -有限な測度とする。また $d = d(1) + d(2)$ とする。特別な場合として λ を 1 次元 Lebesgue 測度、 $\lambda^{(2)}$ を 2 次元 Lebesgue 測度とする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 σ -加法族を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ 上の一意的な測度である。

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

警告

上では 0 と ∞ の積は 0 と約束しているが図に乗って $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 0 \infty = 0$ とか $\infty - \infty = (1-1)\infty = 0\infty = 0$ としてはいけない。極限操作や分配法則の運用は慎重になる必要がある。

非負値（あるいは非正值）ではない可測関数については Fubini の定理はかなり難解で勘違いをしやすい面がある。これは上の警告で述べた点に原因がある。状況を具体例で見よう。

15.1 例. 関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の計算は定理 10.1 の応用でありすべて演習問題とする。

$$(15.2) \quad \int_{[-1,2]} \max\{f(x, y), 0\} \lambda(dy) = \begin{cases} \frac{2}{x(x^2 + 4)} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{-1}{2x(x^2 + 1)} & x < 0 \end{cases}$$
$$\int_{[-1,2]} \max\{-f(x, y), 0\} \lambda(dy) = \begin{cases} \frac{1}{2x(x^2 + 1)} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{-2}{x(x^2 + 4)} & x < 0 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $f(x, y) = \max\{f(x, y), 0\} - \max\{-f(x, y), 0\}$ なので、各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $y \mapsto f(x, y)$ は $[-1, 2]$ 上で λ -可積分であり

$$(15.3) \quad \int_{[-1,2]} f(x, y) \lambda(dy) = \frac{3x}{2(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,2]} f(x, y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \frac{1}{4} \log \frac{8}{5}.$$

ところが $\frac{1}{2|x|(x^2+1)} \geq \frac{1}{4|x|} \forall x \in [0, 1], \frac{2}{|x|(x^2+4)} \geq \frac{2}{5|x|} \forall x \in [0, 1]$ なので

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,2]} \max\{f(x,y), 0\} \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = +\infty$$

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[-1,2]} \max\{-f(x,y), 0\} \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = +\infty$$

である。従って差し引きして累次積分を求めることはできない。また 関数

$$y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y) \lambda(dx)$$

は $[-1, 2]$ 上で λ -可積分でないから累次積分の順序交換も許されない。

15.4 演習問題. (15.2), (15.3) を示せ。

そこで積分が絶対収束していることを要求して解決を図る。次の補題およびその系は定理 14.3 のきわだって重要な応用例であり、非負値とは限らない関数に Fubini の定理を適用する場合にその前提として可積分性判定が必要だがその手順として非常に有用である。例 15.15 および例 15.17 においてその真価が分かるであろう。

15.5 補題. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測とする。以下の同値性が成り立つ。

$$f \text{ } \mu_1 \otimes \mu_2\text{-可積分} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)| \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) < +\infty$$

証明. 定理 14.3(ii) から直ちに従う。 □

15.6 系. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測とする。以下の同値性が成り立つ。

$$f \text{ } \lambda^{(2)}\text{-可積分} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| \lambda(dy) \right) \lambda(dx) < +\infty$$

証明. 系 12.14 と補題 15.5 から従う。 □

15.7 補題. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ -可積分とする。

(i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x,y), 0\} \mu_2(dy)$ と $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x,y), 0\} \mu_2(dy)$ はともに (\mathcal{B}_1, μ_1) -可積分であって次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x,y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx)$$

$$- \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x,y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx).$$

(ii) $\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x,y)| \mu_2(dy) < +\infty\} \in \mathcal{B}_1$ は μ_1 -a.e. 集合である。

証明. (i) 非負値な $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測関数 $\max\{f, 0\} : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に定理 14.3 を適用して関数

$$(*) \quad \mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy)$$

の \mathcal{B}_1 -可測性と次の等式を得る。 f は $\mu_1 \otimes \mu_2$ -可積分なので右辺の積分は有限である。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{f, 0\} \mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty.$$

従って関数 (*) は μ_1 -可積分となる。関数 $-f$ について議論することにより関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy)$ の (\mathcal{B}_1, μ_1) -可積分性と等式

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{-f, 0\} \mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$$

が導かれる。得られた等式を差し引きして (i) に関する考察を終わる。

(ii) 補題 15.5 を適用して $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy)$ の (\mathcal{B}_1, μ_1) -可積分性を得る。従って系 3.6 により結論が導かれる。 \square

ここで $\infty - \infty$ を回避するために行った和に関する取り決めに思い出そう。

再確認

関数 $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して条件 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} = \emptyset, \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} = \emptyset$ が成立するときに限って和 $f + g$ を考える。

累次積分を行う際に次の事態が起こりうる。

$$\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy) = +\infty, \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy) = +\infty.$$

補題 15.7(ii) がその処理策を与える。それによると上のいずれかであるような $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ 全体は μ_1 -零集合をなす。従って μ_1 -a.e. 集合上では $\infty - \infty$ は回避されるわけである。

記号

$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)} := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) & \text{if } \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) < +\infty \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)} := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) & \text{if } \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) < +\infty \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

15.8 補題. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ -可測関数とする。

(i) 関数 $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 -可測である。

(ii) $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) = - \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} -f(x, y) \mu_2(dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

(iii) $\left| \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

証明. $a \in \mathbb{R}$ とする。定理 14.3(i) により次の集合はいずれも \mathcal{B}_1 に属する。

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) < +\infty\} \\ & \{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy) < \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy) + a\} \end{aligned}$$

それらの共通部がまさに

$$\{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) < a\}$$

であるからやはり \mathcal{B}_1 に属する。よって (i) が導けた。(ii) は定義から直ちに従う。(iii) を示すには定理 4.7(ii) を適用すればよい。□

ついに *Fubini* の定理にたどり着いた。 μ_1 -a.e. という概念を避けてこの定理を語ることはできない。まさにそこが最大の見どころである。

15.9 定理. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ -可積分とする。

(i) $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \quad \mu_1$ -a.e. $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

(ii) \mathcal{B}_1 -可測関数 $g : \mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $g(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy) \quad \mu_1$ -a.e. $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ を満たせば、それは μ_1 -可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} g \mu_1.$$

証明. (i) 補題 15.7(ii) により次の集合は \mathcal{B}_1 に属しかつ μ_1 -a.e. 集合である。

$$A := \{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) < +\infty\}.$$

二つの関数は A 上で等しいので (i) が成り立つ。

(ii) 仮定と補題 15.8(iii) により次が成り立つ。

$$|g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) \quad \mu_1$$
-a.e. $x \in \mathbb{R}^{d(1)}$.

従って定理 6.8(i) と定理 14.3(iii) を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^{d(1)}} |g| \mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$$

を得る。すなわち g は μ_1 -可積分である。次の集合も \mathcal{B}_1 に属しかつ μ_1 -a.e. 集合である。

$$B := \{x \in \mathbb{R}^{d(1)} : g(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)}\}.$$

系 6.20 によれば、 $A \cap B$ も μ_1 -a.e. 集合である。さらに次が成り立つ。

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy) - \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy) \quad \forall x \in A \cap B.$$

各項は μ_1 -可積分なので定理 4.10 により

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B} g \mu_1 &= \int_{A \cap B} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{f(x, y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\ &\quad - \int_{A \cap B} \left(\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} \max\{-f(x, y), 0\} \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx). \end{aligned}$$

を得る。ここで $A \cap B$ は $\mathbb{R}^{d(1)}$ の μ_1 -a.e. 集合なので系 4.18(ii) により $A \cap B$ 上での積分は $\mathbb{R}^{d(1)}$ 上でのものに等しい。最後に補題 15.7(i) と組み合わせると結論を得る。□

15.10 系. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^{(2)})$ 可積分とする。

(i) $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy) = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy)}$ λ -a.e. $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $g(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy)}$ λ -a.e. $x \in \mathbb{R}$ を満たせば、それは λ -可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} g \lambda.$$

証明. 系 12.14 と定理 15.9 から従う。□

15.11 演習問題. $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 可測関数 $f : \mathbb{R}^{d(1)} \times \mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が $\int_{\mathbb{R}^{d(2)}} |f(x, y)| \mu_2(dy) < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^{d(1)}$ を満たすなら $\mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} f(x, y) \mu_2(dy)$ は \mathcal{B}_1 可測であることを示せ。

15.12 注意. 具体的な計算例では $\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| \lambda(dy) < +\infty \forall x \in \mathbb{R}$ がしばしば成り立つ。そのようなときは、演習問題 15.11 の結論により、系 15.10 における補助的な関数 g として関数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy)$ を選ぶことができる。このような事情があるので、Fubini の定理を次のようにあっさり表現していることもある。

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx).$$

しかしこれは a.e. 集合の役割を見えなくする危険性をはらんでいる。

次の定理は確率論における独立性の取り扱いに関して決定的な役割を果たす。

15.13 定理. 関数 $f : \mathbb{R}^{d(1)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は (\mathcal{B}_1, μ_1) -可積分、関数 $g : \mathbb{R}^{d(2)} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は (\mathcal{B}_2, μ_2) -可積分とする。このとき関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ -可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y) \mu_1 \otimes \mu_2(dxdy) = \int_{\mathbb{R}^{d(1)}} f \mu_1 \int_{\mathbb{R}^{d(2)}} g \mu_2.$$

証明. 定理 14.7 と定理 15.9 から従う。□

15.14 系. 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ はともに $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ -可積分とする。このとき関数 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda^{(2)})$ -可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \lambda^{(2)}(dxdy) = \int_{\mathbb{R}} f \lambda \int_{\mathbb{R}} g \lambda.$$

証明. 系 12.14 と定理 15.13 から従う。□

Fubini の定理を応用した計算例を挙げる。連続関数 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測であることを確認しておこう。($d = 1$ の場合は補題 11.11 の論法が簡明である。他方、補題 12.18 の論法は一般化できる。)

15.15 例. $t > 0$ に対して $\int_{(0,+\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) = \int_{(t,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \lambda(dy)$.

証明. λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。定理 3.18 と定理 10.1(ii) により

$$\int_{(t,+\infty)} e^{-xy} \lambda(dy) = \sup_{n \in \mathbb{N}: n > t} \int_{(t,n]} e^{-xy} \lambda(dy) = \sup_{n \in \mathbb{N}: n > t} \frac{e^{-tx} - e^{-nx}}{x} = \frac{e^{-tx}}{x} \quad \forall x > 0.$$

上の結果から、変数の役割を取り替えるなどして、関数 $x \mapsto e^{-tx}$ が $(0, +\infty)$ 上で λ 可積分であることも読みとれる。さて $|\sin x| \leq x \quad \forall x > 0$ より

$$\begin{aligned} & \int_{(0,+\infty)} \left(\int_{(t,+\infty)} e^{-xy} |\sin x| \lambda(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{(0,+\infty)} \frac{e^{-tx}}{x} |\sin x| \lambda(dx) \leq \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} \lambda(dx) < +\infty. \end{aligned}$$

系 15.6 により関数 $(x, y) \mapsto 1_{(0,+\infty) \times (t,+\infty)}(x, y) e^{-xy} \sin x$ に系 15.10 が適用できる。

$$\begin{aligned} \int_{(0,+\infty)} \frac{e^{-tx}}{x} \sin x \lambda(dx) &= \int_{(0,+\infty) \times (t,+\infty)} e^{-xy} \sin x \lambda^{(2)}(dx, dy) \\ &= \int_{(t,+\infty)} \left(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy} \sin x \lambda(dx) \right) \lambda(dy). \end{aligned}$$

残っているのは右辺の評価であるが、これは演習問題 15.16 にゆだねる。□

15.16 演習問題. $y > 0$ に対して $\int_{(0,+\infty)} e^{-xy} \sin x \lambda(dx) = \frac{1}{y^2+1}$ を示せ。

同様にして次の広義積分を評価することができる。

15.17 例. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2+1} \lambda(dy)$.

証明. $R > 0$ とする。今度は関数 $(x, y) \mapsto 1_{(0,R] \times (0,+\infty)}(x, y)e^{-xy} \sin x$ に Fubini の定理を適用する。そのためには、以下の検証が不可欠である。

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-xy} \lambda(dy) = \frac{1}{x} \forall x > 0.$$

$$\int_{(0,R]} \left(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy} |\sin x| \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int_{(0,R]} \frac{1}{x} |\sin x| \lambda(dx) < +\infty.$$

従って系 15.6 により $(x, y) \mapsto 1_{(0,R] \times (0,+\infty)}(x, y)e^{-xy} \sin x$ に系 15.10 が適用できる。

$$\begin{aligned} \int_{(0,R]} \frac{1}{x} \sin x \lambda(dx) &= \int_{(0,R]} \left(\int_{(0,+\infty)} e^{-xy} \sin x \lambda(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{(0,+\infty)} \left(\int_{(0,R]} e^{-xy} \sin x \lambda(dx) \right) \lambda(dy). \end{aligned}$$

さて微分すればすぐわかるように、 $x \mapsto e^{-xy} \sin x$ の原始関数の一つは

$$x \mapsto -e^{-xy} \frac{y \sin x + \cos x}{y^2 + 1}$$

である。よって定理 10.1(ii) により

$$\int_{(0,R]} e^{-xy} \sin x \lambda(dx) = \frac{1}{y^2 + 1} - e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2 + 1} \forall y > 0.$$

変数 y の関数として右辺の各項はいずれも λ 可積分であるから、以上をまとめて

$$\int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{y^2 + 1} \lambda(dy) - \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2 + 1} \lambda(dy).$$

右辺第 2 項を処理するために、Schwarz の不等式を使って

$$|y \sin R + \cos R| \leq \sqrt{y^2 + 1} \sqrt{(\sin R)^2 + (\cos R)^2} = \sqrt{y^2 + 1} \forall y > 0$$

と評価する。よって以下に示すように $R \rightarrow +\infty$ のとき 0 に収束する。

$$\left| \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \frac{y \sin R + \cos R}{y^2 + 1} \lambda(dy) \right| \leq \int_{(0,+\infty)} \frac{e^{-Ry}}{\sqrt{y^2 + 1}} \lambda(dy) \leq \int_{(0,+\infty)} e^{-Ry} \lambda(dy) = \frac{1}{R}.$$

0 に収束することを示すだけなら、Lebesgue の収束定理を使ってお手軽にできる。□

15.18 演習問題. 上で述べた Lebesgue の収束定理を使ったお手軽な証明法を与えてみよ。(定理 5.7 だけでなく定理 5.10 も念頭に置いて考察せよ。)

15.19 注意. 絶対収束しない広義積分には Lebesgue の収束定理は適用できないので、以下のような変形は直接的には許されない。

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0,+\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(0,R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx).$$

しかしながら各 $R > 0$ に対して区間 $(0, R)$ 上の関数 $x \mapsto |\sin x|/x$ は λ -可積分である。従ってこれを優関数として定理 5.7 が適用できるので

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0, R]} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) = \int_{(0, R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx)$$

と変形するのは許される。また例 15.15 と定理 3.18 から

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0, +\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{(t, +\infty)} \frac{1}{y^2 + 1} \lambda(dy) = \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{y^2 + 1} \lambda(dy).$$

積分の区間に対する加法性を考慮して組み合わせると

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{y^2 + 1} \lambda(dy) - \int_{(0, R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) \right| \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left| \int_{(0, \infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) - \int_{(0, R]} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \right| = \lim_{t \downarrow 0} \left| \int_{(R, \infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \right|. \end{aligned}$$

部分積分を用いて右辺を評価する (測度論的部分積分については定理 16.3 を見よ)。

$$\begin{aligned} \int_{(R, +\infty)} \sin x \frac{e^{-tx}}{x} \lambda(dx) &= (\cos R - 1) \frac{e^{-tR}}{R} \\ &+ \int_{(R, +\infty)} (1 - \cos x) \left(\frac{e^{-tx}}{x^2} + \frac{te^{-tx}}{x} \right) \lambda(dx) \quad \forall R > 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

さて $0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ を使うと右辺の積分の値は非負でありかつ

$$\int_{(R, +\infty)} \left(\frac{2e^{-tx}}{x^2} + \frac{2te^{-tx}}{x} \right) \lambda(dx) = \frac{2e^{-tR}}{R}$$

で抑えられる。従って次が成り立つ。

$$-\frac{2}{R} \leq \frac{\cos R - 1}{R} e^{-tR} \leq \int_{(R, +\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx) \leq \frac{\cos R + 1}{R} e^{-tR} \leq \frac{2}{R} \quad \forall R > 0, \quad \forall t > 0.$$

以上をまとめて

$$\left| \int_{(0, +\infty)} \frac{1}{y^2 + 1} \lambda(dy) - \int_{(0, R]} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) \right| \leq \frac{2}{R} \quad \forall R > 0.$$

これは例 15.17 の別証明になっている。

16 部分積分とそれが開く世界

部分積分公式は計算技法として役立つだけでなく理論上もきわめて重要である。測度論的観点から部分積分を定式化し、その背後にある豊かな大地を垣間見ることにしよう。

前提

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を 1 次元 Borel 集合族、 λ を 1 次元 Lebesgue 測度とする。

16.1 演習問題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数とする。

(i) 関数 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって次を満たすものが存在することを示せ。

$$F(b) - F(a) = \int_{(a,b]} f \lambda \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \text{ 但し } a < b.$$

(ii) (i) の条件を満たす関数 F は連続であることを示せ。

(iii) (i) の条件を満たす関数 F, G に対して $c \in \mathbb{R}$ が存在して $F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ。

16.2 定義. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数とする。 f の不定積分(indefinite integral)とは演習問題 16.1(i) の条件を満たす関数 F をいう。

16.3 定理. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分関数とする。 f, g それぞれに対して不定積分を F, G とするとき次が成り立つ。

$$\int_{(a,b)} Fg \lambda = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b)} fG \lambda$$

これを部分積分公式(integration by parts formula) という。

証明. 集合 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < y < b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ を導入する。 $A \subset (a, b) \times (a, b)$ なので $(x, y) \mapsto 1_{(a,b)}(x)|f(x)|1_{(a,b)}(y)|g(y)$ は $(x, y) \mapsto 1_A(x, y)f(x)g(y)$ の優関数であり、系 15.14 によれば前者は $\lambda^{(2)}$ 可積分である。従って注意 6.10 にある判定手順により後者の $\lambda^{(2)}$ 可積分性が確認され系 15.10 が適用できる。各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$1_A(x, y) = \begin{cases} 1_{(x,b)}(y) & a < x < b \\ 0 & x \leq a \text{ または } x \geq b \end{cases}$$

であるから次が得られる。

$$(*) \quad \int_A f(x)g(y) \lambda^{(2)}(dx, dy) = \int_{(a,b)} \left(\int_{(x,b)} f(x)g(y) \lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

さて演習問題 16.1(i) の条件及び $\lambda(\{b\}) = 0$ という事実により

$$\int_{(x,b)} g(y) \lambda(dy) = G(b) - G(x), \quad \int_{(a,b)} f(x) \lambda(dx) = F(b) - F(a)$$

ゆえに (*) の右辺は次に等しい。

$$\int_{(a,b)} f(x)(G(b) - G(x)) \lambda(dx) = (F(b) - F(a))G(b) - \int_{(a,b)} f(x)G(x) \lambda(dx).$$

x, y の役割を入れ替えて同様の議論をすると次のように変形できる。

$$\int_A f(x)g(y) \lambda^{(2)}(dx, dy) = \int_{(a,b)} F(y)g(y) \lambda(dy) - F(a)(G(b) - G(a)).$$

得られた二つの表式を比較して部分積分公式に到達する。 □

記号

台が有界な C^r 級関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を $C_0^r(\mathbb{R})$ と表す。

約束

以後、 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ 局所可積分のことを単に局所可積分という。

16.4 補題. 局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とその不定積分 F に対して次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} F \phi' \lambda = - \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}). \text{ ただし } \phi' \text{ は } \phi \text{ の導関数}$$

証明. $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ とする。定理 10.1(ii) により ϕ は ϕ' の不定積分である。定理 16.3 によれば

$$\int_{(-n,n)} F \phi' \lambda = F(n)\phi(n) - F(-n)\phi(-n) - \int_{(-n,n)} f \phi \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ϕ の台が区間 $(-n, n)$ に含まれるように n を選ぶことにより結論に至る。□

もし f が連続関数であるならその不定積分 F は f の原始関数である。そうでないなら一般には F の微分可能性はでないが、補題 16.4 の観点からは、 f が F の導関数の役割を果たしているといえよう。そこで次の概念が生じた。

16.5 定義. $F : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を局所可積分関数とする。ある局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} F \phi' \lambda = - \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R})$$

が成り立つとき F は弱い意味で微分可能(weakly differentiable)であるといい、 f を F の弱い意味での微分あるいは弱微分(weak derivative)という。

Fubini の定理は累次積分の順序を交換するためだけに使われるのではない。その先にある世界を弱微分の世界を題材に紹介する。次の問題を解いて a.e. 集合の定義を確認しておこう。

16.6 演習問題. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ -a.e. 集合は空集合でないことを示せ。

16.7 演習問題. 連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し $f = 0$ λ -a.e. $\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$ であることを示せ。

16.8 演習問題. $F : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を弱微分可能な局所可積分関数とする。 f, g を F の弱微分とすると $f = g$ λ -a.e. であることを示せ。

16.9 補題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数とする。各 $y \in \mathbb{R}$ に対し $f(\cdot + y) = f$ λ -a.e. 即ち $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x+y) \neq f(x)\}) = 0$ であれば、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $f = f(a)$ λ -a.e. である。

証明. 集合 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x+y) \neq f(x)\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に属する。系 13.14 を適用して

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{y \in \mathbb{R} : f(x+y) \neq f(x)\}) \lambda(dx) \\ &= \lambda^{(2)}(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x+y) \neq f(x)\}) \lambda(dy) = 0 \end{aligned}$$

を得る。補題 4.12 により $\{x \in \mathbb{R} : \lambda(\{y \in \mathbb{R} : f(x+y) \neq f(x)\}) = 0\}$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ -a.e. 集合である。演習問題 16.6 で調べたようにそのようなものは空集合ではない。従ってある $a \in \mathbb{R}$ が存在して次が成り立つ。

$$\lambda(\{y \in \mathbb{R} : f(a+y) \neq f(a)\}) = 0.$$

さて $\{y \in \mathbb{R} : f(a+y) \neq f(a)\} + a = \{y \in \mathbb{R} : f(y) \neq f(a)\}$ であるから定理 11.16 により

$$\lambda(\{y \in \mathbb{R} : f(y) \neq f(a)\}) = 0$$

即ち $f = f(a)$ λ -a.e. が導かれた。 □

次の問題を解くには補題 5.9 および定理 5.10 が参考になるであろう。

16.10 演習問題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を局所可積分関数、 $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ とする。このとき

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x-y) \lambda(dx)$$

は微分可能でありその導関数は以下であることを示せ。

$$y \mapsto - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x-y) \lambda(dx)$$

16.11 定理. $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を局所可積分関数、 $r \in \mathbb{N}$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi' \lambda = 0 \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f = c \text{ } \lambda\text{-a.e.}$$

証明. $\phi \in C_0^r(\mathbb{R})$ とする。各 $y \in \mathbb{R}$ に対して関数 $x \mapsto \phi(x-y)$ も $C_0^r(\mathbb{R})$ に属しその導関数は $x \mapsto \phi'(x-y)$ である。従って仮定より

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x-y) \lambda(dx) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

左辺は演習問題 16.10 で調べたように次の関数の微分係数に $-$ 符号を付けたものである。

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x-y) \lambda(dx)$$

その導関数が恒等的に 0 である \mathbb{R} 上の関数は定数関数であるので

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x-y) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) \lambda(dx) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

例 10.16(i) から左辺は $\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\phi(x) \lambda(dx)$ に等しいので

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\phi(x) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) \lambda(dx) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}).$$

各 $y \in \mathbb{R}$ に対して局所可積分関数 $x \mapsto f(x+y)$ と f を対象に演習問題 13.26 で調べた命題を適用して

$$f(\cdot + y) = f \text{ } \lambda\text{-a.e. } \forall y \in \mathbb{R}$$

を得る。補題 16.9 によればある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $f = f(a)$ λ -a.e. ということになるが、まだ $f(a) = \infty$ という可能性が排除できていない。ところが f の局所可積分性により $f(a) = \infty$ では矛盾が生じるので、結論に到達する。 □

従って弱微分可能かつ弱微分が消える局所可積分関数 $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は Lebesgue 零集合上で修正すれば定数関数と見なせる。これは微分可能かつ導関数が消える関数 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は定数関数であるという周知の事実符合している。つぎは補題 16.4 と関連づけて解くとよいだろう。

16.12 演習問題. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を局所可積分関数、 $r \in \mathbb{N}$ とする。このとき f の不定積分 F に対して次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} g \phi' \lambda = - \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ s.t. } g(x) = c + F(x) \quad \lambda\text{-a.e. } x$$

演習問題 16.12 は局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が与えられたときに弱微分が f に等しいような局所可積分関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を決定する問題といえよう。そこで次の概念が生じる。

16.13 定義. 局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対し弱微分可能な局所可積分関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ であってその弱微分が f に等しい、すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} g \phi' \lambda = - \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R})$$

を満たすものを微分方程式 $g' = f$ の弱解(weak solution)であるという。

演習問題 16.12 で調べたことによれば、与えられた局所可積分関数 f に対して微分方程式 $g' = f$ は弱解を持ち、また任意の弱解は Lebesgue 零集合上で修正すれば f の不定積分(原始関数は存在しないかもしれない)と見なせる。

不定積分と原始関数の間にはギャップがある。次の定理とその証明(局所有界という条件の果たす役割が大事)を注意深く読むとその違いが見えて来るであろう。

16.14 定理. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能関数とし、その導関数を f とする。

- (i) 関数 f は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。
- (ii) 導関数 f が局所有界、すなわち各 $a \in \mathbb{R}$ に対して $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して f が区間 $(a-\delta, a+\delta)$ 上で有界であるなら、関数 f は g の弱微分であり、また関数 g は f の不定積分である。

証明. (i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して関数 $x \mapsto n(g(x+1/n) - g(x))$ は連続ゆえ、補題 11.11 より $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測である。各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} n(g(x+1/n) - g(x))$ が成り立つので、補題 5.1 を適用して f の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測性を得る。

(ii) 関数 f は (i) より $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測であり、したがって局所有界性とあわせて、局所可積分であることが分かる。また関数 g も局所可積分であることを注意しておく。ここで $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ を任意に固定し、 $a, b \in \mathbb{R}$, ただし $a < b$, を ϕ の台が区間 (a, b) に含まれるように選ぶ。平均値の定理を適用して次を得る。

$$|n(g(x+1/n) - g(x))| \leq \sup_{a \leq y \leq b+1} |f(y)| \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ここで関数 f の局所有界性より $M := \sup_{a \leq y \leq b+1} |f(y)| < +\infty$ である。従って可積分関数 $M|\phi|$ を優関数として定理 5.7 を適用できるので

$$\int_{\mathbb{R}} n(g(\cdot + 1/n) - g) \phi \lambda \text{ は } \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \text{ に収束する。}$$

また例 10.16(i) から次のように変形できる。

$$\int_{\mathbb{R}} n(g(\cdot + 1/n) - g)\phi \lambda = n \left(\int_{\mathbb{R}} g\phi(\cdot - 1/n) \lambda - \int_{\mathbb{R}} g\phi \lambda \right).$$

右辺の極限は演習問題 16.10 で検証したように $-\int_{\mathbb{R}} g\phi' \lambda$ である。以上より

$$\int_{\mathbb{R}} g\phi' \lambda = - \int_{\mathbb{R}} f\phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R}).$$

すなわち g は弱微分可能であり、関数 f は g の弱微分である。さらに演習問題 16.12 で述べたことによれば、 f のある不定積分 F が

$$g = F \quad \lambda\text{-a.e.}$$

を満たす。さて g は微分可能ゆえ連続であり、 F は不定積分ゆえ連続である (演習問題 16.1)。よって演習問題 16.7 で調べたことから $g(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ を導くことができる。□

定理 16.11 の高階導関数版も成立し、それを定理 16.16 として紹介する。基本となる論法は前者の証明中に登場しているが、見通しよく進めるには少し下ごしらえが必要である。後で証明する補題 16.24 と補題 16.26 を組み合わせるとまとめたものが次の命題である。

16.15 補題. 与えられた $n \in \mathbb{N}$ と $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次を導入する。

$$G(a, b, x) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} g_{n-i}(x) \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ただし } a < b$$

任意の a, b に対して

$$x \mapsto G(a, b, x) \text{ が連続かつ } G(a, b, x+y) = G(a+x, b+x, y) + G(a, b, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

なら各 g_i は高々 i 次の多項式関数であり次が成り立つ。

$$g_n(x+y) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j g_{n-j}(y) + g_n(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

16.16 定理. 局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $n, r \in \mathbb{N}$ ただし $n+1 \leq r$ に対し次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi^{(n+1)} \lambda = 0 \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists g \text{ 高々 } n \text{ 次の多項式関数 s.t. } f = g \quad \lambda\text{-a.e.}$$

証明. n に関する帰納法により証明する。定理 16.11 は $n=1$ の場合に

$$\begin{aligned} f \text{ 局所可積分, } n \leq r, \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(n)} \lambda = 0 \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}) \\ \Rightarrow \exists g \text{ 高々 } n-1 \text{ 次の多項式 s.t. } f = g \quad \lambda\text{-a.e.} \end{aligned}$$

の成立を主張している。そこで $1 \leq n$ とし上の命題の成立を前提とする。

$$f \text{ 局所可積分, } n+1 \leq r, \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(n+1)} \lambda = 0 \quad \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R})$$

と仮定する。定理 16.11 の証明と同じ議論を繰り返して

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\phi^{(n)}(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi^{(n)}(x)\lambda(dx) \quad \forall y \in \mathbb{R} \forall \phi \in C_0^r(\mathbb{R}).$$

各 $y \in \mathbb{R}$ に対して局所可積分関数 $x \mapsto f(x+y) - f(x)$ を対象に前提命題を適用して

$$(*) \quad \exists g_1, \dots, \exists g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x+y) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_{n-i}(y)x^i \quad \lambda\text{-a.e. } x \forall y \in \mathbb{R}.$$

$a < b$ とする。区間 (a, b) 上で積分して次を得る。

$$\int_{(a,b)} (f(\cdot+y) - f) \lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} g_{n-i}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

左辺を $G(a, b, y)$ とおくとこれは補題 16.15 の条件を満たす (検証は演習問題に託す)。よって

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_{n-i}(y)x^i = g_n(x+y) - g_n(x) \quad \forall x \forall y \in \mathbb{R}$$

が成り立ち、しかも g_n は高々 n 次の多項式関数である。(*) を考慮にいれて

$$f(\cdot+y) - f = g_n(\cdot+y) - g_n \quad \text{即ち} \quad f(\cdot+y) - g_n(\cdot+y) = f - g_n \quad \lambda\text{-a.e. } \forall y \in \mathbb{R}$$

ゆえに補題 16.9 よれば、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $f - g_n = f(a) - g_n(a)$ λ -a.e. が成り立つ。よって $g_n + f(a) - g_n(a)$ が求める多項式関数である。□

16.17 演習問題. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を局所可積分関数とし次を導入する。

$$G(a, b, x) := \int_{(a,b)} (f(\cdot+x) - f) \lambda \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ただし } a < b, x \in \mathbb{R}.$$

(i) 任意の a, b に対して $x \mapsto G(a, b, x)$ は連続であることを示せ。

(ii) 任意の a, b に対して $G(a, b, x+y) = G(a+x, b+x, y) + G(a, b, x)$ が成り立つことを示せ。

定理 16.16 でも定理 16.11 と同じ現象が起こっている。弱解の概念を使って整理しておく。

16.18 定義. $F : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を局所可積分関数、 $n \in \mathbb{N}$ とする。ある局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} F\phi^{(n)} \lambda = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f\phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^n(\mathbb{R}) \quad (\phi^{(n)} \text{ は } \phi \text{ の } n \text{ 階導関数})$$

が成り立つとき F は弱い意味で n 回微分可能 (n -times weakly differentiable) であるといい、 f を F の弱い意味での n 階微分 (n -th order weak derivative) という。

16.19 注意. 微積分学では高階微分を帰納的に定義する。従って 1 階導関数を述べずに 2 回微分可能性を云々することはできない。ところが弱い意味での n 回微分可能性は低階の微分を経由せずに定義できる。よって n 回微分可能性からそれより低階の微分可能性を導き出すことは直ちにはできないのである。これが定理 16.16 を証明するのに手間がかかる一因である。

16.20 定義. 局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し局所可積分関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ であってその n 階弱微分が f に等しい、すなわち

$$\int_{\mathbb{R}} g \phi^{(n)} \lambda = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f \phi \lambda \quad \forall \phi \in C_0^n(\mathbb{R})$$

を満たすものを微分方程式 $g^{(n)} = f$ の弱解(weak solution) という。

定理 16.16 によれば微分方程式 $g^{(n)} = 0$ の弱解は Lebesgue 零集合上で修正すれば高々 $n-1$ 次の多項式関数と見なせる。後者は微分方程式 $g^{(n)} = 0$ の通常の意味での解、古典解(classical solution) という、である。このような性質をもつ微分方程式は準楕円的(hypoelliptic) であるという。微分方程式の準楕円性を主張する命題の典型は Laplace 方程式に関する Weyl の補題(つぎの定理 16.21) であり多方面で重要な役割を果たす。

16.21 定理. D を \mathbb{R}^2 の開部分集合とする。 D 上の Laplace 方程式の弱解はある D 上の調和関数(Laplace 方程式の古典解) に $\lambda^{(2)}$ -a.e. の意味で等しい。

この定理の証明は開部分集合上の方程式に関する弱解の定義などもこめてまだ準備不足なのでここでは紹介できない。なお、 $n=1$ のとき定理 16.16 は定理 16.21 の 1 変数バージョンとも見なせる。

16.22 演習問題. $n \in \mathbb{N}$ とする。局所可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して微分方程式 $g^{(n)} = f$ は弱解を持つことを示せ。また g, h をふたつの弱解とするととき差 $g - h$ はある高々 $n-1$ 次の多項式関数に λ -a.e. の意味で等しいことを示せ。

以上は壮麗な景色の一こまに過ぎない。しかしながらことは入門の域をすでに超えている。これから先の展開は別の機会に委ねることにしてひとまず筆を置くこととしたい。

補題 16.15 の証明

補題 16.15 の証明は積分論の主題からは外れるように思われるので、別枠として取り出しておく。なお、定理 16.16 にはもっと汎用性の高い証明方法がある。

16.23 補題. b_1, \dots, b_n を 0 でない実数でかつ相異なるとき次は逆行列を持つ。

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$$

証明. 行列式は $\prod_{i=1}^n b_i \prod_{i < j} (b_j - b_i)$ に等しい。 □

記号

$k \leq n$ なる非負整数 k, n に対して $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 2 項係数

16.24 補題. 与えられた $n \in \mathbb{N}$ と $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次を導入する。

$$G(a, b, x) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} g_{n-i}(x) \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ただし } a < b$$

このとき以下の同値性が成り立つ。

- (i) g_1, \dots, g_n が連続 \Leftrightarrow 任意の a, b に対して $x \mapsto G(a, b, x)$ が連続
- (ii) 任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $g_i(x+y) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+j-i}{j} x^j g_{i-j}(y) + g_i(x)$
- \Leftrightarrow 任意の a, b に対して $G(a, b, x+y) = G(a+x, b+x, y) + G(a, b, x)$

証明. (ii) 2項定理を適用したのち和の順序を交換して $G(a+x, b+x, y)$ を変形する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b+x)^{i+1} - (a+x)^{i+1}}{i+1} g_{n-i}(y) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i \binom{i+1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}) x^{i-k} g_{n-i}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} x^{i-k} g_{n-i}(y) \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

ここで $\binom{i+1}{k+1}/(i+1) = \binom{i}{k}/(k+1)$ を使っている。従って補題 16.23 によれば

$$\frac{g_{n-k}(x+y)}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} x^{i-k} g_{n-i}(y) + \frac{g_{n-k}(x)}{k+1} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

は $G(a, b, x+y) = G(a+x, b+x, y) + G(a, b, x) \quad \forall a < \forall b$ と同値である。分母の $k+1$ を払って変形すると求める関係式が得られる。(i) は補題 16.23 から直ちに分かる。 \square

16.25 補題. $n \in \mathbb{N}$ と $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ が与えられたとする。このとき

$$\psi_i(x) := \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \binom{n-k}{i-k} x^{i-k} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}$$

で定義される多項式関数は任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して次の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} \binom{n+j-i}{j} x^j \psi_{i-j}(y) &= \sum_{k=0}^{i-2} \alpha_k \binom{n-k}{i-k} ((x+y)^{i-k} - x^{i-k} - y^{i-k}) \quad i = 2, \dots, n. \\ \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+j-i}{j} x^j \psi_{i-j}(y) &= \psi_i(x+y) - \psi_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

証明. 2項係数の定義より $\binom{n+j-i}{j} \binom{n-k}{i-j-k} = \binom{n-k}{i-k} \binom{i-k}{j}$ である。2項定理により次を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-k-1} \binom{n+j-i}{j} \binom{n-k}{i-j-k} x^j y^{i-j-k} &= \binom{n-k}{i-k} \sum_{j=1}^{i-k-1} \binom{i-k}{j} x^j y^{i-k-j} \\ &= \binom{n-k}{i-k} ((x+y)^{i-k} - x^{i-k} - y^{i-k}). \end{aligned}$$

和の順序を交換し以上の関係を使うと1番目が導かれる。2番目は $i = 1$ の場合を除いて1番目を少し変形すれば出てくる。また $i = 1$ の場合は直接容易に検証できる。 \square

16.26 補題. 連続関数 $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次は同値である。

$$g_i(x+y) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+j-i}{j} x^j g_{i-j}(y) + g_i(x) \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_0, \dots, \exists \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ s.t. } g_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \binom{n-k}{i-k} x^{i-k} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$$

証明. \Leftarrow は補題 16.25 の2番目の関係から直ちに従う。 \Rightarrow を帰納法により示そう。 $i = 1$ のとき条件式は $g_1(x+y) = g_1(y) + g_1(x) \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}$ である。連続性が仮定されているので演習問題 11.17 で調べたことが適用できる。従って $g_1(x) = g_1(1)x$ である。 $\alpha_0 = g_1(1)/n$ と選べばよい。さて $m < n$ とし次が示せていたとしよう。

$$\exists \alpha_0, \dots, \exists \alpha_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ s.t. } g_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \binom{n-k}{i-k} x^{i-k} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m.$$

$i = m+1$ のとき条件式を少し変形すると

$$g_{m+1}(x+y) = \sum_{j=1}^m \binom{n+j-m-1}{j} x^j g_{m+1-j}(y) + g_{m+1}(y) + g_{m+1}(x)$$

である。補題 16.25 の1番目の関係から右辺の $\sum_{j=1}^m$ に関する項は

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \binom{n-k}{m+1-k} ((x+y)^{m+1-k} - x^{m+1-k} - y^{m+1-k})$$

に等しい。よって連続関数 $x \mapsto g_{m+1}(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \binom{n-k}{m+1-k} x^{m+1-k}$ は g_1 と同じ条件式を満たすことが知れる。よってある $\alpha_m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$g_{m+1}(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \binom{n-k}{m+1-k} x^{m+1-k} = \alpha_m \binom{n-m}{1} x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

以上により $i = m+1$ のときも正しい。 \square

索引

- 一意性定理, 63
- a.e., 26
- a.e. 集合, 26
- L^1 空間の完備性, 28
- L^1 空間における連続関数の稠密性, 49
- L^1 セミノルム, 20
- 円の面積, 88

- 外測度に関して可測, 38
- 回転不変性, 71
- Gauss 核の cosine 変換, 61
- 拡張の一意性, 63
- 可算 \mathcal{C} -被覆, 36
- 可算劣加法性, 37
- 可積分, 5, 18
- 可積分関数, 18
- 可積分性判定, 18, 22, 27, 51, 91
- 可測, 3
- 可測関数, 3
- 可測集合, 3
- 可測集合上で可積分, 21
- 可測集合上の積分, 21
- 可測部分集合全体の族, 38
- Carathéodory 外測度, 37
- 完備, 27
- gamma 関数, 53
- gamma 関数と beta 関数の関係, 87

- 極限と積分の順序交換, 25
- 極座標, 89
- 局所可積分, 81

- 原始関数の存在, 50

- 項別積分定理, 23, 29
- 古典解, 104

- \mathcal{C} -集合, 32
- \mathcal{C} -分割, 32

- σ -加法性, 3
- σ -加法族, 2
- σ -加法的, 33
- σ -加法的な有限加法的測度, 33
- σ -有限, 62
- 弱微分, 99
- 弱解, 104
- 縦線領域の面積, 77
- 準楕円の微分方程式, 104

- Stirling の公式, 61
- スタンダードマシン, 84

- 生成される σ -加法族, 63
- 生成される Dynkin 族, 74
- 積分, 4, 18
- 積分の σ -加法性, 23
- 積分の線形性, 17, 19
- 積分の単調性, 12, 19
- 絶対連続性, 57
- 絶対連続測度による積分, 23
- 選択公理, 47

- 測度, 3
- 測度に関しほとんどいたるところ, 26

- 台, 48
- 単関数, 3
- 単調収束定理, 15, 22

- 長方形集合, 65
- 直積 σ -加法族, 68
- 直積測度, 68
- 直積測度の一意性, 68

- 定義関数, 11
- Dirac 測度, 45
- Dynkin 族, 73
- Dynkin 族定理, 74
- Tonelli の定理, 83

非減少関数が誘導する有限加法的測度, 34
 非交叉族, 32
 微積分の基本定理, 50
 左半開区間, 32
 微分方程式の古典解, 104
 微分方程式の弱解, 101, 104

 Fatou の補題, 23
 不定積分, 98
 Fubini-Tonelli の定理, 83
 Fubini の定理, 76, 83, 93
 部分積分公式, 98
 分割, 32

 平行移動不変性, 64, 71
 平行四辺形の面積, 80
 beta 関数, 53
 変数変換公式-1 次元, 59
 変数変換公式-線形な場合, 84
 変分法の基本補題, 81

 Hopf の拡張定理, 41
 ほとんどいたるところ, 26
 Borel 可測関数, 64, 68
 Borel 集合, 64, 68
 Borel 集合族, 64, 68
 Borel 測度, 64, 68

 Markov の不等式, 12

 有限加法性, 7, 33
 有限加法的測度, 33
 有限加法的測度の測度への拡張, 41
 有限加法的測度が誘導する外測度, 35

 弱い意味での微分, 99, 103
 弱い意味で微分可能, 99, 103

 Radon 測度, 64, 68
 Laplace 方程式, 104

 Riesz-Fischer の定理, 28

 Lebesgue 外測度, 46

 Lebesgue 可積分, 50
 Lebesgue 可測集合, 46, 67
 Lebesgue 可測関数, 46
 Lebesgue-Stieltjes 測度, 45
 Lebesgue-Stieltjes 外測度, 45
 Lebesgue-Stieltjes 積分, 47
 Lebesgue-Stieltjes 測度の一意性, 64
 Lebesgue 積分, 50
 Lebesgue 積分を保存する線形写像, 84
 Lebesgue 測度, 46, 67
 Lebesgue 測度の回転不変性, 71
 Lebesgue 測度を保存する線形写像, 79
 Lebesgue 測度の平行移動不変性, 64, 71
 Lebesgue 測度の一意性, 68
 Lebesgue の収束定理, 24
 Lebesgue の優収束定理, 24
 Lebesgue-Fatou の補題, 25

 零集合, 26, 40
 劣加法性, 30

 Weyl の補題, 104