解析学 A 試験 2004 年 7 月 28 日 15:00-16:30 学生番号 　　　 氏名 　　　

$\boxed{1}$ λ を 1 次元ルベーグ測度とする。

(1) $\mathbb{R}$ 上の非負 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数 f について次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-|x|/n}\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda(dx)$$

(2) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ に対し次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x+c|}\cos(bx)\,\lambda(dx) = \frac{2a}{a^2+b^2}\cos(bc)$$

(3) $\varepsilon > 0$ と $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数 f について次が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xy)\,\lambda(dx)\Big)e^{-\varepsilon|y|}\lambda(dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon^2+x^2}\,\lambda(dx)$$

(4) $t, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ に対し次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ty)e^{-\varepsilon|y|}}{1+y^2}\lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon e^{-|x+t|}}{x^2+\varepsilon^2}\,\lambda(dx)$$

$\boxed{2}$ λ を 1 次元ルベーグ測度とする。

(1) $a < b$ とする。次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(a,b]}(x^2)\,\lambda(dx) = \int_{(0,\infty)} 1_{(a,b]}(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で定義された次の関数は測度であることを示せ。

$$A \mapsto \int_{\mathbb{R}} 1_A(x^2)\,\lambda(dx)$$

(3) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x^2)\,\lambda(dx) = \int_{(0,\infty)} 1_A(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

(4) $\mathbb{R}$ 上の非負 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数 f について次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} f(x^2)\,\lambda(dx) = \int_{(0,\infty)} f(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$