＜解析学 A 期末試験の解答におけるポイント＞

$\boxed{1}$ (1) 被積分関数は非負かつ $e^{-|x|/n} \le e^{-|x|/(n+1)}$ であるから単調収束定理が適用できる。

更に極めたい人へ：より正確には関数 $x \mapsto f(x)e^{-|x|/n}$ も $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測であることを確認しておく必要がある。次を示せばよい。

$$\boxed{\mathcal{B}\text{-可測関数 } f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} \text{ に対して積 } fg \text{ も } \mathcal{B}\text{-可測である。}}$$

説明を簡単にするため、f, g ともに非負としよう。次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\{x \in \mathbb{R}^d : f(x)g(x) < a\}\\ &= \begin{cases} \{x : f(x) = 0\} \cup \{x : g(x) = 0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Q}: b > 0} \{x : f(x) < b, g(x) < a/b\} & a > 0 \\ \emptyset & a \le 0 \end{cases}\end{aligned}$$

ここで、有理数全体 $\mathbb{Q}$ の可算性により、右辺は可算無限合併である。

(2) まず可積分性を確認する。被積分関数の絶対値は $x \mapsto e^{-a|x+c|}$ で上から評価される。単調収束定理により

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x+c|}\,\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{(-n,n)} e^{-a|x+c|}\,\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - e^{-a(n+c)} - e^{a(-n+c)}}{a} = \frac{2}{a} < +\infty$$

ここで微積分の基本定理を使っている。従って可積分性がチェックできたので、ルベーグの収束定理の適用環境が整った。

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x+c|} \cos(bx)\,\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{(-n,n)} e^{-a|x+c|} \cos(bx)\,\lambda(dx)$$

$n \ge |c|$ とする。積分区間に関する加法性により

$$\begin{aligned}&\int_{(-n,n)} e^{-a|x+c|} \cos(bx)\,\lambda(dx)\\ &= \int_{(-n,-c)} e^{a(x+c)} \cos(bx)\,\lambda(dx) + \int_{(-c,n)} e^{-a(x+c)} \cos(bx)\,\lambda(dx)\end{aligned}$$

被積分関数の原始関数はそれぞれ、積分定数の違いを除いて

$$x \mapsto \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2} e^{a(x+c)}, x \mapsto \frac{-a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2} e^{-a(x+c)}$$

微積分の基本定理を適用すると

$$\begin{aligned}\int_{(-n,n)} e^{-a|x+c|} \cos(bx)\,\lambda(dx) &= \frac{2a\cos(bc)}{a^2+b^2}\\ &- \frac{a\cos(-bn) + b\sin(-bn)}{a^2+b^2} e^{a(-n+c)} + \frac{-a\cos(bn) + b\sin(bn)}{a^2+b^2} e^{-a(n+c)}\end{aligned}$$

右辺は $2a\cos(bc)/(a^2+b^2)$ に収束する。

(3) $\lambda^{(2)}$ を 2 次元ルベーグ測度とする。$(x,y)\mapsto f(x)\cos(xy)e^{-\varepsilon|y|}$ の $\lambda^{(2)}$ 可積分性を確認する。絶対値は $|f(x)|e^{-\varepsilon|y|}$ で上から評価される。Fubini の定理を適用して

$$\int_{\mathbb{R}^2}|f(x)|e^{-\varepsilon|y|}\lambda^{(2)}(dx,dy)=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\lambda(dx)\Big)e^{-\varepsilon|y|}\lambda(dy)=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\lambda(dx)\frac{2}{\varepsilon}<+\infty$$

従って可積分性がチェックできたので、Fubini の定理の適用環境が整った。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}f(x)\cos(xy)\,\lambda(dx)\Big)e^{-\varepsilon|y|}\lambda(dy)&=\int_{\mathbb{R}^2}f(x)\cos(xy)e^{-\varepsilon|y|}\lambda^{(2)}(dx,dy)\\&=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-\varepsilon|y|}\cos(xy)\,\lambda(dy)\Big)f(x)\lambda(dx)=\int_{\mathbb{R}}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}f(x)\,\lambda(dx)\end{aligned}$$

ここで (2) で得た結果を援用している。

> 更に極めたい人へ：より正確には関数 $(x,y)\mapsto f(x)\cos(xy)e^{-\varepsilon|y|}$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測性を確認しておく必要がある。ポイントの一つは $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数 f に対して 2 変数関数 $(x,y)\mapsto f(x)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可測なことである。それは $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ （講義ノートの系 11.13）から従う。

(4) 可積分関数 f として具体的に $x\mapsto e^{-|x+t|}$ をとり (3) に当てはめる。累次積分の計算には (2) で得た結果が使える。

補足：実は問題の続きがある。重要な公式なのだが割愛した。

(5) $t\in\mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(ty)}{1+y^2}\lambda(dy)=\pi e^{-\|t\|}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ (1) 場合分けが必要である。$0\le a<b$ のとき

$$1_{(a,b]}(x^2)=1\Leftrightarrow\sqrt{a}<x\le\sqrt{b}\ \text{or}\ -\sqrt{b}\le x<-\sqrt{a}$$

であるから, 微積分の基本定理も使って計算すると

$$\int_{\mathbb{R}}1_{(a,b]}(x^2)\,\lambda(dx)=\lambda([-\sqrt{b},-\sqrt{a}))+\lambda((\sqrt{a},\sqrt{b}])=2\sqrt{b}-2\sqrt{a}=\int_{(a,b]}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

$a<0\le b$ のとき

$$1_{(a,b]}(x^2)=1\Leftrightarrow-\sqrt{b}\le x\le\sqrt{b}$$

である。$(0,0]=\emptyset$ と理解すると関係 $(0,b]=(0,\infty)\cap(a,b]$ が成り立つので

$$\int_{\mathbb{R}}1_{(a,b]}(x^2)\,\lambda(dx)=\lambda([-\sqrt{b},\sqrt{b}])=2\sqrt{b}=\int_{(0,b]}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)=\int_{(0,\infty)}1_{(a,b]}(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

$a<b<0$ のとき $1_{(a,b]}(x^2)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ であり、$(0,\infty)\cap(a,b]=\emptyset$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(a,b]}(x^2)\,\lambda(dx)=0=\int_{(0,\infty)} 1_{(a,b]}(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

以上で解答としては十分であるが、見通しをよくするため次の関数を導入する。

$$v(x):=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 2\sqrt{x} & x>0\end{cases}$$

関数 v は連続な非減少関数である。結論は次のようにまとめられる。

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(a,b]}(x^2)\,\lambda(dx)=v(b)-v(a)=\int_{(0,\infty)} 1_{(a,b]}(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

(2) σ 加法性をチェックする。$A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\ n\in\mathbb{N}$ かつ $A_n\cap A_m=\emptyset\ n\neq m$ とする。$A:=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とかくと次が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}(x^2)=1_A(x^2)$$

非負関数についての項別積分定理を適用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}1_{A_n}(x^2)\,\lambda(dx)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}(x^2)\,\lambda(dx)=\int_{\mathbb{R}}1_A(x^2)\,\lambda(dx)$$

更に極めたい人へ：より正確には関数 $x\mapsto 1_A(x^2)$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測性を確認しておく必要がある。これは、講義ノートの補題 11.18 を $\mathbb{R}$ の場合に読替えれば分かる。

(3) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を定義域とする二つの測度を比較する。

$$\mu: A\mapsto\int_{\mathbb{R}}1_A(x^2)\,\lambda(dx),\quad \nu: A\mapsto\int_{(0,\infty)}1_A(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

(1) により $a<b$ なら $\mu((a,b])=v(b)-v(a)=\nu((a,b])$ が成り立つ。ここで v は項目 (1) の最後に導入した関数である。Lebesgue-Stieltjes 測度の一意性定理を適用して

$$\int_{\mathbb{R}}1_A(x^2)\,\lambda(dx)=\mu(A)=\nu(A)=\int_{(0,\infty)}1_A(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

(4) $f=1_A$ の場合が (3) で示したことである。スタンダードマシンがここで登場する。まず積分の線形性により非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 単関数についても (4) が成り立つ。一般の場合には非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 単関数の列であって次の条件を満たすものが存在することを利用する。

$$f_n(x)\le f_{n+1}(x)\,\forall x\in\mathbb{R}\forall n\in\mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}}f_n(x)=f(x)\,\forall x\in\mathbb{R}.$$

単関数についての結果により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x^2)\,\lambda(dx) = \int_{(0,\infty)} f_n(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

単調収束定理を適用して求める関係式に到達する。

補足：f を非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数として、関数 $x \mapsto f(x)1_{[0,\infty)}(x)e^{-x/2}$ に (4) を適用すると

$$\int_{\mathbb{R}} f(x^2)e^{-x^2/2}\,\lambda(dx) = \int_{(0,\infty)} f(x)\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}\,\lambda(dx)$$

これは、正規分布とカイ 2 乗分布の関係を示す公式である。