

解析学 A 期末試験 (2005.7.28) のポイント

①  $\lambda$  を 1 次元ルベーグ測度、 $f$  を  $\mathbb{R}$  上の連続関数とする。 $f = 0$   $\lambda$ -a.e. なら任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x) = 0$  である。

証明 背理法で示す。ある  $a \in \mathbb{R}$  で  $f(a) \neq 0$  とする。 $\varepsilon := |f(a)|/2 > 0$  に注意する。連続であるから  $\delta > 0$  が存在して  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$  となる。よって

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| > |f(a)| - \varepsilon = |f(a)|/2 > 0$$

が成り立つ。これを集合の包含関係で表現すると

$$(a - \delta, a + \delta) \subset \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.$$

よって

$$0 < 2\delta = \lambda((a - \delta, a + \delta)) \leq \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\})$$

すなわち  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$  は  $\lambda$ -零集合でない。これは  $f = 0$   $\lambda$ -a.e. と矛盾する。

注意 (i) 一般には  $\lambda$ -a.e. は例外点を許す。例えば、 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  は  $\lambda$ -a.e. 集合であり (各自確認せよ)  $\lambda$  この場合  $\mathbb{Q}$  は例外点を表す。ところが①で考察した集合  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$  は  $f$  の連続性により閉集合であるという特別な性質を持つ。閉集合かつ  $\lambda$ -a.e. 集合であるものは  $\mathbb{R}$  に限ることを証明してみよ。

(ii) ①で述べた事実は、積分を解析学に応用する際に決定的な役割を果たす。その一端を知りたいものには、講義ノートの“15 節 部分積分とそれが開く世界”が参考になるかもしれない。

②  $\lambda$  を 1 次元ルベーグ測度とする。また  $f$  を非負値  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  可測関数とする。

(1) 対応  $A \mapsto \int_A f \lambda$  は  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  を定義域とする測度である。

(2)  $\mu$  を (1) で述べた測度とする。非負値  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  可測関数  $g$  に対し次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} g \mu = \int_{\mathbb{R}} g f \lambda$$

証明 (1)  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  とする。定義により

$$\int_A f \lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f \lambda$$

非負関数の積分であるからその値は非負実数または  $+\infty$  であり、 $1_{\emptyset} f = 0$  であるから

$$\int_{\emptyset} f \lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_{\emptyset} f \lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 \lambda = 0$$

ここまでは取り立てて言うこともない。問題は  $\sigma$  加法性である。  $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $n \in \mathbb{N}$  かつ  $A_n \cap A_m = \emptyset$   $n \neq m$  とする。  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  とかくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} f = 1_A f$$

が成り立つ。よって非負関数列に対する項別積分定理を適用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_n} f \lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f \lambda = \int_A f \lambda$$

を得るが、これは  $\sigma$  加法性に他ならない。

(2) スタンダードマシンの手続きに従えばよい。  $g$  が  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  の定義関数である場合

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A \mu = \mu(A) = \int_A f \lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f \lambda$$

であり、示すべき等式が成立する。次に  $g$  を非負単関数とする。  $g$  は可測な定義関数の正実数を係数とする 1 次結合である。すなわち

$$g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$$

ここで  $c_i > 0$ ,  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である。積分の線形性と定義関数で証明された等式により

$$\int_{\mathbb{R}} g \mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i} \mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i} f \lambda = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i} f \lambda = \int_{\mathbb{R}} g f \lambda$$

一般には非負値  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -単関数の列  $g_n$  で

$$g_n \leq g_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

を満たすものが存在する（これは証明しなくても良い）。単関数で証明された等式により各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \mu = \int_{\mathbb{R}} g_n f \lambda$$

なので単調収束定理を適用して結論に至る。

注意 (i) 既に述べたように [2] ではスタンダードマシンを適用している。典型例でもあるし、また積分の重要な性質を体得するのに最適だからよく習熟しておくことを勧める。演習問題 13.6 あたりを解くのが手頃であろう。自信がいたら講義で割愛した補題 12.11 の証明に挑戦するのもよからう。

(ii) [2](1) で述べた測度はルベーグ測度に関して絶対連続であるという。測度論の更に深い理解と幅広い応用のためにはこの概念が重要で Radon-Nikodym の定理が基礎となる。

3  $\lambda$  を 1 次元ルベーグ測度  $\nu$  を右連続非減少関数で  $\nu(0) = 0$  を満たすものとする。

(1)  $A := \{(x, y) : 0 < x \leq y\}$  とおくと、任意の  $t > 0$  に対して次が成り立つ。

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^*(x) = \int_A te^{-ty} (dv^* \otimes \lambda)(dx, dy)$$

(2)  $A$  を (1) のものとする。任意の  $t > 0$  に対して次が成り立つ。

$$\int_A te^{-ty} (dv^* \otimes \lambda)(dx, dy) = \int_{(0,+\infty)} e^{-y} v(y/t) \lambda(dy)$$

(3)  $y \rightarrow +\infty$  のとき  $v(y)/y$  は 1 に収束すると仮定する。次が成り立つ。

$$\lim_{t \downarrow 0} t \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^*(x) = 1$$

証明 (1) 非負可測関数に対する Fubini の定理が適用できる (積分値が  $+\infty$  でもかまわない)。累次積分になおして  $y$  について積分する。  $1_A(x, y) = 1_{(0,+\infty)}(x)1_{[x,+\infty)}(y)$  であるから

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x, y) te^{-ty} (dv^* \otimes \lambda)(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} 1_{(0,+\infty)}(x) 1_{[x,+\infty)}(y) te^{-ty} \lambda(dy) \right) dv^*(x)$$

$y$  についての積分は原始関数を求めることにより

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[x,+\infty)}(y) te^{-ty} \lambda(dy) = -e^{-ty} \Big|_{y=x}^{y=\infty} = e^{-tx}$$

と実行できるので

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{(0,+\infty)}(x) e^{-tx} dv^*(x)$$

に到達する。

(2) (1) と同様、非負可測関数に対する Fubini の定理が適用できる。累次積分になおして  $x$  について積分する。  $1_A(x, y) = 1_{(0,y]}(x)1_{(0,+\infty)}(y)$  であるから

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x, y) te^{-ty} (dv^* \otimes \lambda)(dx, dy) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} 1_{(0,y]}(x) 1_{(0,+\infty)}(y) te^{-ty} dv^*(x) \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (v(y) - v(0)) 1_{(0,+\infty)}(y) te^{-ty} \lambda(dy) \end{aligned}$$

ここで Lebesgue-Stieltjes 測度の特徴付け

$$dv^*((a, b]) = v(b) - v(a)$$

を使った。  $v(0) = 0$  であったので

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x, y) te^{-ty} (dv^* \otimes \lambda)(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} v(y) 1_{(0,+\infty)}(y) te^{-ty} \lambda(dy)$$

を得る。次に変数変換公式を適用する（これは証明しなくても良い）。

$$\int_{\mathbb{R}} f(cy)\lambda(dy) = \frac{1}{|c|} \int_{\mathbb{R}} f \lambda$$

ここで  $c \neq 0$  である。適用は  $f(y) = v(y/t)1_{(0,+\infty)}(y/t)te^{-y}$ ,  $c = t$  として行うが、注意すべきは  $1_{(0,+\infty)}(y/t) = 1_{(0,+\infty)}(y)$  が成り立つことである。よって

$$\int_{\mathbb{R}} v(y)1_{(0,+\infty)}(y)te^{-ty}\lambda(dy) = \int_{(0,+\infty)} v(y/t)e^{-y}\lambda(dy)$$

(3)  $R > 0$  が存在して  $y > R \Rightarrow v(y)/y \leq 2$  が成り立つことに注目する。また単調非減少であるから  $0 < y \leq R \Rightarrow v(y) \leq v(R)$  であることも重要である。よって

$$0 \leq v(y) \leq v(R) + 2y \quad \forall y \in (0, +\infty).$$

この評価が優関数の存在を保証する。実際  $0 < t \leq 1$  のとき

$$0 \leq tv(y/t)e^{-y} \leq t(v(R) + 2\frac{y}{t})e^{-y} = v(R)e^{-y} + 2ye^{-y}$$

右辺は  $(0, +\infty)$  上  $y$  について Lebesgue 可積分である。さて仮定より  $y > 0$  を固定するとき

$$\lim_{t \downarrow 0} tv(y/t)e^{-y} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{v(y/t)}{y/t} ye^{-y} = ye^{-y}$$

と収束する。可積分な優関数が存在するので Lebesgue の収束定理が適用でき

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{(0,+\infty)} tv(y/t)e^{-y}\lambda(dy) = \int_{(0,+\infty)} ye^{-y}\lambda(dy) = -(y+1)e^{-y} \Big|_{y=0}^{y=\infty} = 1.$$

さて (1), (2) より

$$t \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^*(x) = t \int_{(0,+\infty)} v(y/t)e^{-y}\lambda(dy)$$

であるから、結論が導けた。

注意 (i)  $A := \{(x, y) : 0 < x \leq y\}$  は 2次元 Borel 集合である。確認してみよ。今回の試験答案ではこれを証明することを求めるつもりはないが、Fubini の定理を適用するためには重要な前提条件である。

(ii) (1), (2) を統合した変形は一種の部分積分である。講義ノートの“15節 部分積分とそれが開く世界”が参考になるであろう。

(iii) [3]の結論は級数における Abel の定理の類似物である。