$\boxed{1}$ λ を 1 次元ルベーグ測度、f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする。$f = 0$ λ-a.e. なら任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = 0$ であることを示せ。

解答例 背理法で示す。ある $a \in \mathbb{R}$ で $f(a) \neq 0$ とする。$\varepsilon := |f(a)|/2 > 0$ に注意する。連続性より $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる。よって

$$\begin{aligned}|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| &\geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| \\ &> |f(a)| - \varepsilon = |f(a)|/2 > 0\end{aligned}$$

が成り立つ。これを集合の包含関係で表現すると

$$(a-\delta, a+\delta) \subset \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 0\}$$

右辺は $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ とも書ける。よって

$$0 < 2\delta = \lambda((a-\delta, a+\delta)) \leq \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\})$$

すなわち $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ は λ-零集合でない。これは $f = 0$ λ-a.e. と矛盾する。

$\boxed{2}$ λ を 1 次元ルベーグ測度とする。また f を非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数とする。
(1) 対応 $A \mapsto \int_A f\,\lambda$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を定義域とする測度であることを示せ。

解答例 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする。定義により

$$\int_A f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f\,\lambda$$

非負関数の積分であるからその値は非負実数または $+\infty$ であり、$1_\emptyset f = 0$ であるから

$$\int_\emptyset f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_\emptyset f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\,\lambda = 0$$

$A_n \in B(\mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}$ かつ $A_n \cap A_m = \emptyset$ $n \neq m$ とする。$A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ とかくと

$$\sum_{n=1}^\infty 1_{A_n} f = 1_A f$$

よって非負関数列に対する項別積分定理を適用して

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f\,\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_{A_n} f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f\,\lambda = \int_A f\,\lambda$$

を得るが、これは σ 加法性に他ならない。

(2) μ を (1) で述べた測度とする。非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測関数 g に対し次が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} g\,\mu = \int_{\mathbb{R}} gf\,\lambda$$

解答例 スタンダードマシンの手続きに従えばよい。g が $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ の定義関数である場合

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A\,\mu = \mu(A) = \int_A f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_A f\,\lambda$$

であり、示すべき等式が成立する。次に g を非負単関数とする。g は可測な定義関数の正実数を係数とする 1 次結合である。すなわち

$$g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$$

ここで $c_i > 0$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。積分の線形性と定義関数で証明された等式により

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g\,\mu &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}\,\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i} f\,\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i} f\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} gf\,\lambda\end{aligned}$$

一般には非負値 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-単関数の列 g_n で

$$g_n \leq g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

を満たすものが存在する。単関数で証明された等式により各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} g_n\,\mu = \int_{\mathbb{R}} g_n f\,\lambda$$

なので単調収束定理を適用して結論に至る。

$\boxed{3}$ λ を 1 次元ルベーグ測度 v を右連続非減少関数で $v(0)=0$ を満たすものとする。

(1) $A := \{(x,y) : 0 < x \le y\}$ とおくとき、任意の $t>0$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\int_{(0,+\infty)} e^{-tx}\, dv^\star(x) = \int_A te^{-ty}\,(dv^\star \otimes \lambda)(dx,dy)$$

解答例 非負可測関数に対する Fubini の定理が適用できる。累次積分になおして y について積分する。$1_A(x,y) = 1_{(0,+\infty)}(x)1_{[x,+\infty)}(y)$ であるから右辺は

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_{(0,+\infty)}(x)1_{[x,+\infty)}(y)te^{-ty}\,\lambda(dy)\Big) dv^\star(x)$$

に等しい。y についての積分は

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{[x,+\infty)}(y)te^{-ty}\,\lambda(dy) = -e^{-ty}\Big|_{y=x}^{y=\infty} = e^{-tx}$$

と実行でき、左辺に到達する。

(2) A を (1) のものとする。任意の $t>0$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\int_A te^{-ty}\,(dv^\star \otimes \lambda)(dx,dy) = \int_{(0,+\infty)} e^{-y}v(y/t)\lambda(dy)$$

解答例 累次積分になおして x について積分する。$1_A(x,y) = 1_{(0,y]}(x)1_{(0,+\infty)}(y)$ であるから

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x,y)te^{-ty}\,(dv^\star \otimes \lambda)(dx,dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} 1_{(0,y]}(x)1_{(0,+\infty)}(y)te^{-ty}\,dv^\star(x)\Big)\lambda(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}} v(y)1_{(0,+\infty)}(y)te^{-ty}\lambda(dy)\end{aligned}$$

ここで $dv^\star((a,b]) = v(b)-v(a)$ と $v(0)=0$ を使った。次に変数変換公式（これは証明しなくても良い）

$$\int_{\mathbb{R}} f(cy)\lambda(dy) = \frac{1}{|c|}\int_{\mathbb{R}} f\,\lambda \text{ 但し } c \ne 0$$

を $f(y) = v(y/t)1_{(0,+\infty)}(y/t)te^{-y}$, $c=t$ として適用する。注意すべきは $1_{(0,+\infty)}(y/t) = 1_{(0,+\infty)}(y)$ が成り立つことである。よって

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} v(y)1_{(0,+\infty)}(y)te^{-ty}\lambda(dy)\\ &= \int_{(0,+\infty)} v(y/t)e^{-y}\lambda(dy)\end{aligned}$$

(3) $y \to +\infty$ のとき $v(y)/y$ は 1 に収束すると仮定する。次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{t\downarrow 0}\ t\int_{(0,+\infty)} e^{-tx}\,dv^\star(x) = 1$$

解答例 $R>0$ が存在して $y > R \Rightarrow v(y)/y \le 2$ が成り立つことに注目する。また単調非減少であるから $0<y\le R \Rightarrow v(y) \le v(R)$ であることも重要である。よって

$$0 \le v(y) \le v(R) + 2y \ \forall y \in (0,+\infty).$$

この評価が優関数の存在を保証する。実際 $0<t\le 1$ のとき

$$\begin{aligned}0 \le tv(y/t)e^{-y} &\le t(v(R) + 2\frac{y}{t})e^{-y}\\ &\le v(R)e^{-y} + 2ye^{-y}\end{aligned}$$

右辺は $(0,+\infty)$ 上 y について Lebesgue 可積分である。さて仮定より $y>0$ を固定するとき

$$\lim_{t\downarrow 0} tv(y/t)e^{-y} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{v(y/t)}{y/t}ye^{-y} = ye^{-y}$$

と収束する。可積分な優関数が存在するので Lebesgue の収束定理が適用でき

$$\begin{aligned}&\lim_{t\downarrow 0}\int_{(0,+\infty)} tv(y/t)e^{-y}\lambda(dy)\\ &= \int_{(0,+\infty)} ye^{-y}\lambda(dy) = -(y+1)e^{-y}\Big|_{y=0}^{y=\infty} = 1.\end{aligned}$$

さて (1), (2) より

$$t\int_{(0,+\infty)} e^{-tx}\,dv^\star(x) = t\int_{(0,+\infty)} v(y/t)e^{-y}\lambda(dy)$$

であるから、結論が導けた。