＜演習問題の解答例５月１２日出題分＞

**問題．** 各 $k=1,2,\ldots,N$ に対して $0 \le b_{k,n} \le b_{k,n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ のとき

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,n} = \sum_{k=1}^{N} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n}$$

が成り立つことを示せ。

**解答例．** まず $b_{k,m} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{N} b_{k,m} \le \sum_{k=1}^{N} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n} \ \forall m \in \mathbb{N} \text{ 従って } \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,m} \le \sum_{k=1}^{N} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n}$$

仮に $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,m} = +\infty$ であるなら、上の不等式により $\sum_{k=1}^{N} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n} = +\infty$ でもあり、等号が成立する。従って検討すべきは次の場合である。

$$M := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,m} < +\infty$$

以後、上の条件のもとで議論する。さて各項は非負なので $b_{i,n} \le \sum_{k=1}^{N} b_{k,n}$ $\forall i$ よって

$$M_i := \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{i,n} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,n} = M < +\infty \ \forall i = 1,2,\ldots,N$$

$\varepsilon > 0$ としよう。上限の性質により $n(1), n(2), \ldots, n(N) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$M_1 - \varepsilon < b_{1,n(1)},\ M_2 - \varepsilon < b_{2,n(2)},\ \ldots,\ M_N - \varepsilon < b_{N,n(N)}$$

ここで $\max\{n(1), n(2), \ldots, n(N)\} \le n$ であるような $n \in \mathbb{N}$ をひとつえらぶ。ポイントは今まで使っていなかった仮定 $\boxed{b_{k,n} \le b_{k,n+1}}$ である。

$$b_{1,n(1)} \le b_{1,n},\ b_{2,n(2)} \le b_{2,n},\ \ldots,\ b_{N,n(N)} \le b_{N,n}$$

となるのでこれらの和をとると

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + \cdots + M_N - N\varepsilon &< b_{1,n(1)} + b_{2,n(2)} + \cdots + b_{N,n(N)} \\ &\le b_{1,n} + b_{2,n} + \cdots + b_{N,n} \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,m} = M \end{aligned}$$

よって次の不等式が抽出される。

$$\sum_{k=1}^{N} M_k - N\varepsilon < M$$

この段階で $\varepsilon > 0$ は全く任意である。従って

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{k,n} = \sum_{i=k}^{N} M_k \le M = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} b_{k,m} \quad \text{（$<$ でなく $\le$ であることに注意）}$$

これが証明しようとしていた逆向きの不等式である。