＜演習問題の解答例６月２日出題分＞

問題． 測度の劣加法性すなわち $(\mathcal{B}, \mu)$ を測度とするとき

$$A_n \in \mathcal{B} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つことを示せ。

解答例． 講義プリントの補題 6.17 そのものであるが、丸写ししないで何かアレンジしてみよう。そうすればステップアップへの道が開ける。というわけでプリントとは一見違う証明をつけてみよう。まず単調収束定理により

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n)$$

である。（この段階ですでに測度の σ 加法性が重要な役割を果たしている）よって次を示せばよい。

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \, \forall k \in \mathbb{N}$$

$k = 2$ の場合に検証できると後は帰納法が適用できる。従って検討すべきは次の命題である。

$$A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

非交差合併については加法性が成り立つので

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^{\mathrm{c}}) \leq \mu(A) + \mu(B \cap A^{\mathrm{c}}) + \mu(B \cap A) = \mu(A) + \mu(B)$$

これが証明しようとしていた不等式である。