

1.10 演習問題. a_{mn} を数列で次を満たすものとする .

$$\exists b_m \text{ s.t. } |a_{mn}| \leq b_m \quad \forall m \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

このとき $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ は $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束することを示せ .

証明. 任意に正の実数 ε をとる . 正項級数 $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ が収束しているので , 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して , 自然数 $m_0(\varepsilon)$ が存在して ,

$$k > m_0(\varepsilon) \text{ のとき , } \quad \sum_{m=k}^{\infty} b_m < \varepsilon.$$

よって , 各 n に対して ,

$$\sum_{m=m_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{mn}| \leq \sum_{m=m_0(\varepsilon)+1}^{\infty} b_m < \varepsilon.$$

各 $m = 1, \dots, m_0(\varepsilon)$ に対して , a_{mn} が $n \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束しているので , 自然数 $n_0(\varepsilon, m)$ が存在して

$$n > n_0(\varepsilon, m) \text{ のとき , } \quad |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{m_0(\varepsilon)}.$$

よって , $n_0(\varepsilon) = \max\{n_0(\varepsilon, 1), \dots, n_0(\varepsilon, m_0(\varepsilon))\}$ と定めれば ,

$$n > n_0(\varepsilon) \text{ のとき , } \quad \sum_{m=1}^{m_0(\varepsilon)} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{m_0(\varepsilon)} m_0(\varepsilon) = \varepsilon.$$

以上より , 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して , 自然数 $n_0(\varepsilon)$ が存在して ,

$$n > n_0(\varepsilon) \text{ のとき , } \quad \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right| \leq \sum_{m=1}^{m_0(\varepsilon)} |a_{mn}| + \sum_{m=m_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{mn}| < 2\varepsilon.$$

2.19 演習問題. \mathbb{R}^d の部分集合 A に対し , 同値性 $A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow 1_A \mathcal{B}$ -可測 を示せ .

証明. 補題 2.9 を適用してもよいが , ここは定義に戻って確かめよう . まず $A \in \mathcal{B}$ と仮定する . このとき ,

$$\{x \in \mathbb{R}^d : 1_A < a\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{B} & a \leq 0 \\ A^c \in \mathcal{B} & 0 < a \leq 1 \\ \mathbb{R}^d \in \mathcal{B} & a > 1 \end{cases}$$

より, 1_A \mathcal{B} -可測となる.

次に, 1_A \mathcal{B} -可測とする. このとき,

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : 1_A \geq 1\} \in \mathcal{B}$$

より, $A \in \mathcal{B}$ となる.

3.5 演習問題. $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を非負値 \mathcal{B} -可測関数とする.

(i) $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \int_{\mathbb{R}^d} af\mu = a \int_{\mathbb{R}^d} f\mu$ を示せ.

(ii) $g \leq f \implies \int_{\mathbb{R}^d} g\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\mu$ を示せ.

証明. (i) を示す. $a = 0$ のときは明らかより, $a > 0$ のときを示す. \bar{f} を $\int_{\mathbb{R}^d} f\mu$ を定義する sup の対象となる単関数とする. このとき, $a\bar{f}$ は $\int_{\mathbb{R}^d} af\mu$ を定義する sup の対象となる単関数であることから, 積分の定義より,

$$a \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} a\bar{f}\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} af\mu.$$

よって, このような \bar{f} で sup をとると,

$$a \int_{\mathbb{R}^d} f\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} af\mu.$$

また, 上式より次が成り立つ.

$$\frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^d} f\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f}{a}\mu.$$

ここで, af は \mathcal{B} -可測関数より上式に f の代わりに af を代入すると,

$$\int_{\mathbb{R}^d} af\mu \leq a \int_{\mathbb{R}^d} f\mu$$

が得られる. よって求める結果を得る.

次に (ii) を示す. \bar{g} を $\int_{\mathbb{R}^d} g\mu$ を定義する sup の対象となる単関数とする. このとき, \bar{g} は $\int_{\mathbb{R}^d} f\mu$ を定義する sup の対象となる単関数であることから, 積分の定義より,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\mu.$$

よって, このような \bar{g} で sup をとると,

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\mu.$$