2005 年度解析学 A レポート 5 月 26 日課題解答例

4.13 演習問題. $\mathcal{B}$-可測関数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目) であって条件

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\neq 0\})=0$$

を満たすもの全体は線形空間をなすことを示せ.

証明. 実数値関数に導入される通常の和とスカラー倍の演算が

$$N:=\{f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\ ;\ \mathcal{B}\text{-可測関数},\ \mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\neq 0\})=0\}$$

で閉じていることを示せばよい．測度の単調性と劣加法性すなわち

$$\mu(A\cup B)\leq\mu(A)+\mu(B)$$

を使うと任意の $f,g\in N$ に対して,

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)+g(x)\neq 0\}) &\leq \mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^d : g(x)\neq 0\})\\ &\leq \mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\neq 0\})+\mu(\{x\in\mathbb{R}^d : g(x)\neq 0\})\\ &= 0.\end{aligned}$$

任意の $f\in N$ と任意の $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ に対して,

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^d : af(x)\neq 0\})=\mu(\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\neq 0\})=0.$$

故に，求める結果を得る.

$\boxed{\text{更に先を知りたい人への補足}}$ 補題 4.12 と組み合わせると次の結論が得られる.

N は可積分な $\mathcal{B}$-可測関数の全体がなす空間 V の線形部分空間である.

したがって商線形空間 V/N が定義できるがこれを通常 L^1 という記号で表すことが多い.
また定理 6.13 により L^1 セミノルムはこの空間上に完備な距離を誘導する.

5.9 補題. $\mathbb{R}^d$ の部分集合 $E, a\in E$ と関数 $f:E\to\mathbb{R}$ に対して次の同値性が成り立つ.

f は a で連続 $\Leftrightarrow$ 任意の a に収束する E の点列 a_n に対して $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する.

証明. 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し，$x\in E$ に対して,

$$|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon \tag{1}$$

が成り立っていると仮定する．E に属する点列 $\{a_n\}$ が a に収束しているものとすれば,
自然数 n_0 を

$$n>n_0\Longrightarrow|a_n-a|<\delta$$

が成り立つように選ぶことができる．このとき，(1) により，

$$n > n_0 \Longrightarrow |f(a_n) - (a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，任意の a に収束する E の点列 a_n に対して $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する．

逆に，任意の a に収束する E の点列 a_n に対して $f(a_n)$ は $f(a)$ に収束していると仮定する．求めたい結果を否定すれば，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，どんな $\delta > 0$ に対しても，

$$|x - a| < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

となる $x \in E$ が存在することになる．このとき，E に属する点列 $\{x_n\}$ を

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

となるように選ぶことができる．この場合，点列 $\{x_n\}$ は a に収束するが，数列 $\{f(x_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．これは仮定に矛盾するので求める結果を得る．

5.10 定理. E を $\mathbb{R}^p$ の部分集合，$f : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を次のような関数とする．

各 $x \in E$ に対して関数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{B}$ 可測,
各 $y \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 $E \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, y)$ は連続,
$^\exists g$ $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分 s.t. $|f(x, y)| \leq g(y)$ $\forall x \in E$ $\forall y \in \mathbb{R}^d$.

このとき関数 $E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\mu(dy)$ は連続である．

証明. 可積分な優関数が存在するので，各 $x \in E$ に対して

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\mu(dy)$$

が定義できる．各 $x \in E$ における連続性については，補題 5.9 より，任意の x に収束する E の点列 x_n に対して $h(x_n)$ は $h(x)$ に収束することを示せばよい．そこで x_n を x に収束する E の点列とする．仮定より，任意の $n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$|f(x_n, y)| \leq g(y)$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y) = f(x, y)$$

が成り立つ．*Lebesgue* の収束定理から，

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x_n, y)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\mu(dy)$$

すなわち $\lim_{n \to \infty} h(x_n) = h(x)$ が示せた．よって E 上の関数 h は連続である．