2005年度解析学Aレポート6月16日課題解答例

**6.21 演習問題**. 次の (i), (ii) が成り立つことを示せ.

(i) $A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-零集合 $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-零集合.

(ii) $A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合 $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合.

**証明**. (i) を示す．$A_n$ は $(\mathcal{B},\mu)$-零集合より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\exists B_n \in \mathcal{B} \text{ s.t. } \mu(B_n) = 0,\ A_n \subset B_n.$$

ここで，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ かつ，測度の劣加法性すなわち

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0$$

より，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は $(\mathcal{B},\mu)$-零集合となる．

(ii) を示す．ド・モルガンの法則より，$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$．よって，集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ が $(\mathcal{B},\mu)$-零集合であることを示せばよい．しかし，$A_n^c$ は $(\mathcal{B},\mu)$-零集合より，(i) から求める結果を得る．

**6.24 演習問題**. $f$, $g$, $h$ は $\mathcal{B}$-可測関数 $\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ.

$$f \leq g\ \mu\text{-a.e. } g \leq h\ \mu\text{-a.e. } \Rightarrow f \leq h\ \mu\text{-a.e.}$$

**証明**. 集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq g(x)\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq h(x)\}$ は $\mu$-a.e. 集合より，共通部分集合 $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq h(x)\}$ は $\mu$-a.e. 集合である．また，

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \leq h(x)\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq h(x)\}$$

より，$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq h(x)\}$ は $\mu$-a.e. 集合となる．