2005 年度解析学 A レポート 7 月 14 日課題解答例

9.11 演習問題. 右連続な非減少関数 $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある $c \in \mathbb{R}$ に対して，次を満たすとする．

$$\int_{[0,+\infty)} e^{-cx} dv^\star(x) < +\infty.$$

(i) 各 $t > c$ に対して $\int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x) < +\infty$ であることを示せ．

(ii) $[c, +\infty)$ 上の関数 $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x)$ は連続であることを示せ．

(iii) $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x) = v(0) - \sup_{\delta>0} v(-\delta) + \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x)$ を示せ．

(iv) 極限 $t \to +\infty$ において $\int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x)$ は収束することを示せ．

証明. 定理 9.6 がすべての基本である．すなわち

$$(a, b] \in \mathrm{Mble}(dv), dv^\star((a, b]) = v(b) - v(a)$$

半開区間が可測集合であることから，それ以外のタイプの区間もすべて可測集合であることが導かれるし，また補題 9.9 によれば，連続関数は可測関数である．以上は基本的重要性を持つものではあるが，ここでは可測性をあえて強調しないことにする．

(i) を示す．$t > c$ であるから，非負値関数 $x \mapsto 1_{[0,+\infty)}(x)e^{-tx}$ は可積分な優関数 $x \mapsto 1_{[0,+\infty)}(x)e^{-cx}$ を持つ．よって可積分である．

(ii) を示す．可積分な優関数 $x \mapsto 1_{[0,+\infty)}(x)e^{-cx}$ が存在するので，Lebesgue の収束定理（定理 5.10）から求める結果を得る．

(iii) を示す．まず $dv^\star((-1, 0]) = v(0) - v(-1) < +\infty$ であることに注意する．したがって補題 3.10(ii) より

$$dv^\star(\{0\}) = dv^\star(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 0])) = \inf_{n\in\mathbb{N}} dv^\star((-1/n, 0])) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(v(0) - v(-1/n))$$

v は非減少関数より，$\sup_{n\in\mathbb{N}} v(-1/n) = \sup_{\delta>0} v(-\delta)$ であるから

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(v(0) - v(-1/n)) = v(0) - \sup_{n\in\mathbb{N}} v(-1/n) = v(0) - \sup_{\delta>0} v(-\delta)$$

以上より $dv^\star(\{0\}) = v(0) - \sup_{\delta>0} v(-\delta)$. 積分の加法性より

$$\int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x) = \int_{\{0\}} e^{-tx} dv^\star(x) + \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x).$$

右辺第 1 項は $dv^\star(\{0\})$ に等しい．よって，求める結果を得る．

(iv) を示す．可積分な優関数 $x \mapsto 1_{[0,+\infty)}(x)e^{-cx}$ が存在するので，Lebesgue の収束定理（定理 5.10）から

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{(0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x) = \int_{(0,+\infty)} 0 \ dv^\star(x) = 0$$

よって (iii) とあわせて $\int_{[0,+\infty)} e^{-tx} dv^\star(x)$ は $v(0) - \sup_{\delta>0} v(-\delta)$ に収束することを得る．

9.17 演習問題. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．

(i) f は原始関数をもつことを示せ．

(ii) f は非負値としまたその原始関数の一つを $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．次の同値性を示せ．

$$f \text{ Lebesgue 可積分} \Leftrightarrow F \text{ 有界}$$

証明. (i) を示す．連続関数は任意の有界閉区間上で可積分であることが重要である．関数 G を次で定める;

$$G(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{(0,x]} f\lambda & x > 0 \text{ のとき} \\ \displaystyle -\int_{(x,0]} f\lambda & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

これが f の原始関数であることを示す手順は定理 9.15(i) と同様である．$x = 0$ における微分可能性だけを述べておく．任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする．連続性により，$\exists \delta > 0$ s.t. $|y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(0)| < \varepsilon$ となる．さて $x < 0$ のとき，$\int_{(0,0]} f\lambda = 0$ に注意すると，

$$G(x) - G(0) - f(0)x = -\int_{(x,0]} f\lambda - f(0)x = -\int_{(x,0]} (f - f(0))\lambda$$

が成り立つ．ここで $\lambda((x,0]) = -x$ に注意せよ．定理 4.7(ii) を適用して

$$|G(x) - G(0) - f(0)x| \leq \int_{(x,0]} |f - f(0)|\lambda \leq \varepsilon|x|$$

が成り立つ．また，$x > 0$ のときも同様な評価が成り立つ．

(ii) を示す．(i) で導入した関数 G は次を満たす．

$$a < b \text{ のとき } G(b) - G(a) = \int_{(a,b]} f\lambda$$

原始関数は加法的定数を除いて一意的なので，$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ である．従って関数 F も同じ条件を満たす．f を Lebesgue 可積分とする．任意の $x > 0$ に対して，f の非負値性より，

$$F(0) \leq F(x) = F(0) + \int_{(0,x]} f\lambda \leq F(0) + \int_{(-\infty,+\infty)} f\lambda$$

とでき，$x < 0$ に対しても同様なので，F は有界となる．
逆にある M が存在して $|F(x)| \leq M$ とする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{(-n,n]} f\lambda = F(n) - F(-n) \leq 2M.$$

f は非負値なので単調収束定理より

$$\int_{(-\infty,+\infty)} f\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{(-n,n]} f\lambda \leq 2M < +\infty$$

よって，f は Lebesgue 可積分となる．