測度と積分

広島大学理学部数学科解析学A講義ノート別冊

岩田耕一郎

2006 年 7 月 26 日

目 次

1 積分の定義

記号

$\mathbb{Z}$ 整数全体、$\mathbb{N}$ 正の整数全体、$\mathbb{R}$ 実数全体、$\mathbb{Q}$ 有理数全体
$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1 定義. $\mathcal{B}$ を集合の族とする（全体集合を規定する必要はない）。それが次の条件を満たすとき、$\mathcal{B}$ は quasi σ-field をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$
(ii) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{B}$ （ここで $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$）
(iii) $A_n \in \mathcal{B}\,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

(iii) において合併の対象となるのは <u>可算無限個</u> の集合達である。

以下 $\mathcal{B}$ を quasi σ-field とする。さて集合族 $\{\emptyset\}$ は自明に quasi σ-field であるが通常は $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ と想定している。

1.2 注意. $A \in \mathcal{B}$ とすると集合族 $\{B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$ は A 上の σ-field である。

1.3 補題. (i) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{B}$.
(ii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

証明. (i) 使うトリックは $A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n = \emptyset\ n \geq 3$ とおくことである。このとき $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$. 他方 $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A \in \mathcal{B}$, $A \cap B = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right) \in \mathcal{B}$. □

記号

X, Y を空でない集合とする。写像 $f : X \to Y$ に対し $\mathrm{Dom}\, f := X$（定義域）、$\mathrm{Image}\, f := \{f(x); x \in X\}$（像）と書く。また部分集合 $B \subset Y$ に対し $f^{-1}B := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ （B の逆像）と書く。

1.4 定義. $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる関数 f が次の条件を満たすとき $\mathcal{B}$-measurable であるという。

$$\mathrm{Dom}\, f \in \mathcal{B}, f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{B}$ 可測関数が存在するなら $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ である。

1.5 補題. f を $\mathrm{Dom}\, f \in \mathcal{B}$ であるような $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数とする。以下の 4 条件は同値である。
(i) f is $\mathcal{B}$-measurable.
(ii) $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \geq a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$
(iii) $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \leq a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$
(iv) $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y > a\} \in \mathcal{B}\ \forall a \in \mathbb{R}$

証明. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) をいうには $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < a\}$ と $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \geq a\}$ は互いに他方の $\mathrm{Dom}\, f$ に関する補集合であることを使う。$f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \geq a + 1/n\}$ より (ii) $\Rightarrow$ (iv) が $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \leq a - 1/n\}$ より (iii) $\Rightarrow$ (i) が導かれる。 □

1.6 系. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数で $\mathcal{B}$-measurable なものとする。

$$f^{-1}\{y\} \in \mathcal{B}\, \forall y \in \overline{\mathbb{R}},\ f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq y < b\} \in \mathcal{B}\, \forall a < \forall b$$

証明. $f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq y < b\} = f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < b\} \cap f^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y \geq a\}$ □

1.7 定義. 次の条件を満たす $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 f を $\mathcal{B}$-simple function と呼ぶ。

$\mathcal{B}$-meassurable, Image f は有限集合かつ $-\infty$, $+\infty$ を含まない

1.8 定義. 集合の族 $\mathcal{B}$ と関数 $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ について次の条件が成り立つとき、$(\mathcal{B}, \mu)$（定義域 $\mathcal{B}$ を省略することも多い）は measure であるという。

(i) $\mathcal{B}$ は quasi σ-field をなす
(ii) $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{B}$（$+\infty$ も許す）かつ $\mu(\emptyset) = 0$
(iii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) においては $+\infty$ に発散する場合も許す。性質 (iii) を σ-additivity という。

1.9 注意. $A \in \mathcal{B}$ とすると μ を集合族 $\{B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$ 上に制限したものは通常の意味で A 上の measure である。

前提

以下、$(\mathcal{B}, \mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

記号

同じ定義域を持つ $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 f, g に対し条件 $g(x) \leq f(x)\ \forall x$ を $g \leq f$ と表記する。

1.10 定義. f を非負値関数（$+\infty$ の値をとることも許す）であって $\mathcal{B}$-measurable なものとする。つぎで定義される量（$+\infty$ も許す）を f の μ についての integral と言う。

$$\int f\, \mu := \sup\{ \sum_{y \in \mathrm{Image}\, g} y\mu(g^{-1}\{y\})\, ; g \text{ non-negative } \mathcal{B}\text{-simple function}, \\ \mathrm{Dom}\, g = \mathrm{Dom}\, f, g \leq f\}$$

もし $0 \in \mathrm{Image}\, g$ かつ $\mu(g^{-1}\{0\}) = +\infty$ の場合にはそれらの積は 0 と約束をしておく。

次が成り立つことを確認するのは補題 4.3 の登場まで待つことにする。

f is an $\overline{\mathbb{R}}$-valued $\mathcal{B}$-measurable function $\Rightarrow$ $|f|$, $\max\{f, 0\}$ and $\max\{-f, 0\}$ are non-negative and $\mathcal{B}$-measurable

1.11 定義. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数で $\mathcal{B}$-measurable なものとする。

$$\int \max\{f,0\}\,\mu < +\infty \text{ を満たすとき } \mu\text{-upper integrable であると}$$
$$\int \max\{-f,0\}\,\mu < +\infty \text{ を満たすとき } \mu\text{-lower integrable であるという。}$$

上のいずれかが成り立つとき μ-semi integrable であるといい、μ-upper integrable かつ μ-lower integrable であることを μ-integrable という。次を f の μ についての integral とよぶ。

$$\int f\,\mu := \int \max\{f,0\}\,\mu - \int \max\{-f,0\}\,\mu.$$

非負値関数については $\max\{-f,0\} = 0$ であるから、非負値可測関数から一般の可測関数への拡張はシームレスである。

2 単関数の積分

この節では単関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく。

前提

$(\mathcal{B},\mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

2.1 定義. f を非負値 $\mathcal{B}$-simple function とする。

$$\int f\,\mu := \sum_{y\in \mathrm{Image}\,f} y\mu(f^{-1}\{y\}) \quad \text{値としては } +\infty \text{ も許容}$$

もし $0 \in \mathrm{Image}\,f$ かつ $\mu(f^{-1}\{0\}) = +\infty$ の場合にはそれらの積は 0 と約束をしておく。

約束

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ における加法および乗法を $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ にまで拡張しておこう。問題なのは 0 と ∞ の積であるがこれを 0 と約束する。重要なのは分配則

$$a(x+y) = ax + ay \ \forall a \forall x \forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

が生き残るところである。だが $\infty - \infty = (1-1)\infty = 0\infty = 0$ という計算はもちろん間違いである。

次は定義 2.1 から直ちに分かる。

2.2 補題. 非負値 $\mathcal{B}$-単関数の積分は非負であり、恒等的に値 0 をとる関数の積分は 0 である。

2.3 補題. g を $\mathrm{Image}\,g$ が可算集合であるような $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数とするときその $\mathcal{B}$-measurability は条件 $g^{-1}\{y\} \in \mathcal{B}\ \forall y \in \mathrm{Image}\,g$ と同値である。

証明. $g^{-1}\{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < a\} = \bigcup_{y \in \mathrm{Image}\, g : y < a} g^{-1}\{y\}$. □

記号

集合 A に対しその要素の個数を $\sharp A$ と表記する。

2.4 補題. f, g を $\mathcal{B}$-simple function, $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を関数（可測性などは要求しない）とする。合成関数 $h : x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ も $\mathcal{B}$-simple function である。

証明. まず関数 h の像が有限集合であることを確かめる。次の関係が決定的である。

$$\mathrm{Image}(f, g) \subset \mathrm{Image}\, f \times \mathrm{Image}\, g. \tag{2.5}$$

（左辺の方が右辺より真に小さい集合でありうる。具体例を与えてみよ。）他方、

$$\mathrm{Image}\, h = \phi(\mathrm{Image}(f, g))$$

という関係が成り立つ。以上により

$$\sharp\, \mathrm{Image}\, h \le \sharp\, \mathrm{Image}(f, g) \le \sharp\, \mathrm{Image}\, f\, \sharp\, \mathrm{Image}\, g < +\infty$$

可測性判定として補題 2.3 を使う。(2.5) により

$$h^{-1}\{t\} = \bigcup_{y \in \mathrm{Image}\, f, z \in \mathrm{Image}\, g : \phi(y,z) = t} f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\} \tag{2.6}$$

右辺は補題 2.3 と補題 1.3 により、$\mathcal{B}$ に属することがわかる。 □

2.7 系. f, g を $\mathcal{B}$-simple function であって $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ とする。$a, b \in \mathbb{R}$ に対し 1 次結合 $af + bg$ と積 fg も $\mathcal{B}$-simple function である。

証明. $\phi(y, z) = ay + bz$ あるいは $\phi(y, z) = yz$ として補題 2.4 を適用する。 □

2.8 補題. h を non-negative $\mathcal{B}$-simple function, A を $\mathbb{R}_{\ge 0}$ の有限部分集合とする。

$$\mathrm{Image}\, h \subset A \Rightarrow \int h\, \mu = \sum_{t \in A} t \mu(h^{-1}\{t\})$$

証明. 右辺の方が余分に加えていることになるが、実際は $t \notin \mathrm{Image}\, h$ なら $h^{-1}\{t\} = \emptyset$ である。測度の性質により $\mu(\emptyset) = 0$ だから、余分に足しているところは影響しない。 □

2.9 補題. $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. finite additivity

証明. 補題 1.3 の証明と同じトリックを使って、定義 1.8(iii) から結論を引き出す。 □

約束

以後、測度の σ-加法性というときは有限加法性も込める。

2.10 定理. f, g を $\mathcal{B}$-simple function であって $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ とする。非負値関数 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int \phi(f, g)\, \mu = \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g} \phi(y, z) \mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

証明. 補題 2.4 で示したように $h : x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ は non-negative $\mathcal{B}$-simple function である。さて (2.6) の右辺を構成する集合たちは $\mathcal{B}$ に属しかつ互いに交わらない。したがって

$$\begin{aligned} t\mu(h^{-1}\{t\}) &= \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g : \phi(y,z) = t} t\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \\ &= \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g : \phi(y,z) = t} \phi(y, z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \end{aligned}$$

ただし両辺に t を掛けてある。ここで (2.5) によれば

$$\operatorname{Image} h = \phi(\operatorname{Image}(f, g)) \subset \phi(\operatorname{Image} f \times \operatorname{Image} g).$$

補題 2.8 を念頭に置いて、t について $A := \phi(\operatorname{Image} f \times \operatorname{Image} g)$ 上で足しあわせよう。

$$\begin{aligned} \sum_{t \in A} t\mu(h^{-1}\{t\}) &= \sum_{t \in \phi(\operatorname{Image} f \times \operatorname{Image} g)} \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g : \phi(y,z) = t} \phi(y, z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \\ &= \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g} \phi(y, z)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\}) \end{aligned}$$

他方、補題 2.8 により左辺は h の積分と等しい。 □

2.11 系. f, g を non-negative $\mathcal{B}$-simple function であって $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ とする。
(i) $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \int (af + bg)\, \mu = a \int f\, \mu + b \int g\, \mu.$ （右辺においては $0\infty = 0$）
(ii) $g \leq f \Rightarrow \int g\, \mu \leq \int f\, \mu.$
(iii) $\max\{\int h\, \mu\, ; h$ non-negative $\mathcal{B}$-simple function, $\operatorname{Dom} h = \operatorname{Dom} f, h \leq f\} = \int f\, \mu.$

証明. まず $\phi(y, z) = a \max\{y, 0\} + b \max\{z, 0\}$ として定理 2.10 を適用する。非負値 $\mathcal{B}$-単関数 $af + bg$ に対してつぎの関係が得られる。

$$\int (af + bg)\, \mu = \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g} (ay + bz)\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

右辺を変形するためにさらに $\phi(y, z) = \max\{y, 0\}$ として定理 2.10 を適用してみよう。

$$\int f\, \mu = \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g} y\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

同様にして次も導くことができる。

$$\int g\, \mu = \sum_{y \in \operatorname{Image} f, z \in \operatorname{Image} g} z\mu(f^{-1}\{y\} \cap g^{-1}\{z\})$$

以上を組み合わせると (i) がわかる。さて系 2.7 により $f-g$ も $\mathcal{B}$-単関数である。非負値であるからその積分は補題 2.2 により非負値である。そこで (i) を適用して

$$\int f\,\mu = \int (f-g+g)\,\mu = \int (f-g)\,\mu + \int g\,\mu \geq \int g\,\mu$$

となる。よって (ii) が示せた。(iii) は (ii) から直ちに従う。 □

系 2.11(iii) により定義 1.10 と定義 2.1 が整合することが確認できた。

記号

$A \subset D$, $D \neq \emptyset$ なる集合の組に対し A の D に関する indicator function を $1_{A:D}$ と表記する。

$$1_{A:D}(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in D \setminus A \end{cases} \quad \text{定義域は } D \text{ である}$$

2.12 補題. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, $A \subset D$ とする。同値性 $A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow 1_{A:D}$ $\mathcal{B}$-measurable が成り立つ。

2.13 補題. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, $A_n \subset D\ \forall n$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする。このとき $\sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i:D}$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数であって次が成り立つ。

$$\int \sum_{i=1}^n b_i 1_{A_i:D}\,\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(A_i).$$

証明. 系 2.11(i) により $n=1$, $b_1=1$ の場合に示せばよい。 □

3 非負値可測関数の積分

この節では非負値可測関数の積分についていくつか基本的な性質を明らかにしておく。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

積分を測度論の設定で述べるのは、解析の現場で直面する極限の交換操作が柔軟に行え、しかもその判定条件が簡潔であるという大きなメリットがあるからである。その中心となるのが単調収束定理であり、定義 1.10 の中に最初から組み込まれている。

3.1 補題. 非負値 $\mathcal{B}$-可測関数の積分は非負値である。

3.2 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $a \in \mathbb{R}$ に対して af も $\mathcal{B}$-可測である。

3.3 補題. f, g を non-negative $\mathcal{B}$-measurable function であって $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$ とする。
(i) $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \displaystyle\int af\,\mu = a\int f\,\mu$. (ii) $g \leq f \Rightarrow \displaystyle\int g\,\mu \leq \int f\,\mu$. **積分の単調性**

(iii) $A \in \mathcal{B}$, $A \subset \mathrm{Dom}\, f$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \leq f(x)\ \forall x \in A \Rightarrow \mu(A) \leq \dfrac{1}{b}\displaystyle\int f\,\mu$. *Markov* **の不等式**

(iv) $\displaystyle\int f\,\mu < +\infty \Rightarrow \mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$.

単調収束定理を次の命題に帰着させて証明する。そのさい測度の σ-加法性が重要になる。

3.4 補題. a_n, b_n 非負値単調増加列 $\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

3.5 補題. (i) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(ii) $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, $\mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

証明. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ なので補題 2.9 が適用できる。 □

3.6 補題. (i) 定義 1.8 の (iii) は次と有限加法性で置き換えることができる。

$$A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

(ii) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_1) < +\infty \Rightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

証明. (i) $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ for $n \geq 2$ とおく。このとき

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n\, \forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ B_n \cap B_m = \emptyset \text{ if } n > m$$

μ の σ-加法性を適用すると次が得られるので $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ である。

$$\mu(A_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\, \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

(ii) 今度は $B_n := A_1 \setminus A_n$ for $n \in \mathbb{N}$ とおく。このとき

$$A_n = A_1 \setminus B_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

ここで重要な仮定 $\mu(A_1) < +\infty$ を使う。補題 3.5(i) により

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_1) < +\infty\, \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \mu(A_1) < +\infty$$

である。よって補題 3.5(ii) により

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n),\ \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

さて $B_n \subset B_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ なので (i) が適用でき $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ を得る。 □

3.7 補題. $A, D \in \mathcal{B}$, $A \subset D$, $D \neq \emptyset$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$, f_n を non-negative $\mathcal{B}$-measurable function の列で $\operatorname{Dom} f_n = D\ \forall n$ をみたすものとする。

$$f_n \leq f_{n+1}\,\forall n \in \mathbb{N}, b \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,\forall x \in A \Rightarrow b\mu(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu.$$

証明. $0 < r < b$ とする。条件 $f_n \leq f_{n+1}$ から $\{f_n > r\} \subset \{f_{n+1} > r\}$ が従う。各集合は $\mathcal{B}$ に属する。$A \subset \{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_n > r\}$ なので補題 3.5(i) と補題 3.6(i) により

$$(\star)\qquad \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f_n > r\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{f_n > r\}).$$

集合 $\{f_n > r\}$ と関数 f_n の組に補題 3.3(iii) を適用すると

$$r\mu(\{f_n > r\}) \leq \int f_n\,\mu$$

従って $(\star)$ とあわせて

$$r\mu(A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} r\mu(\{f_n > r\}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu$$

が導かれる。r は $0 < r < b$ であれば任意なので結論を得る。 □

3.8 系. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f_n を non-negative $\mathcal{B}$-simple function の列, g を non-negative $\mathcal{B}$-simple function, $\operatorname{Dom} f_n = D\ \forall n$, $\operatorname{Dom} g = D$ とする。

$$f_n \leq f_{n+1}\,\forall n \in \mathbb{N}, g(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,\forall x \in D \Rightarrow \int g\,\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu.$$

証明. $y \in \operatorname{Image} g$, $y > 0$ とする。記号の煩雑を避けるため適宜 $B = g^{-1}\{y\}$ とかく。関数 $1_{B:D} f_n$ も系 2.7 により $\mathcal{B}$-単関数である。また非負であることは明らか。

$$1_{B:D} f_n \leq 1_{B:D} f_{n+1}\,\forall n \in \mathbb{N}, y = g(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{B:D}(x) f_n(x)\,\forall x \in B$$

なので補題 3.7 を適用できる。従って

$$y\mu(g^{-1}\{y\}) = y\mu(B) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{B:D} f_n\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu$$

上は $y = 0$ の場合も成り立つ。ここで $1_{B:D} f_n \leq 1_{B:D} f_{n+1}$ を再び使う。補題 3.3(ii) により

$$0 \leq \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu \leq \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_{n+1}\,\mu\ \forall n \in \mathbb{N}\,\forall y \in \operatorname{Image} g$$

よって y についての和に対して補題 3.4 を適用できる。

$$\sum_{y\in\operatorname{Image} g} y\mu(g^{-1}\{y\}) \leq \sum_{y\in\operatorname{Image} g} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{y\in\operatorname{Image} g} \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu$$

左辺は定義より $\int g\,\mu$ である。従って

$$\int g\,\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{y\in\mathrm{Image}\,g} \quad \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu$$

あとは各 $n\in\mathbb{N}$ に対して次の等式の成立を言えば証明が完結する。

$$\sum_{y\in\mathrm{Image}\,g} \int 1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n\,\mu = \int f_n\,\mu.$$

各 $1_{g^{-1}\{y\}:D} f_n$ は非負値 $\mathcal{B}$ 単関数であり系 2.11(i) の前提条件は満たされている。

$$\sum_{y\in\mathrm{Image}\,g} 1_{g^{-1}\{y\}:D}(x) f_n(x) = f_n(x)\ \forall x\in D$$

であるので上の等式が成立することを得る。 □

記号

各 $n\in\mathbb{N}$ に対して次の関数 $\phi_n : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を導入する。

$$\phi_n(y) := \begin{cases} 0 & y < 1/2^n \\ (k-1)/2^n & (k-1)/2^n \leq y < k/2^n, k = 2,3,\ldots,2^n n \\ n & y \geq n \end{cases}$$

3.9 補題. (i) $\phi_n(y) \leq \phi_{n+1}(y) \leq y\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall y\in\overline{\mathbb{R}}$. $y < z \Rightarrow \phi_n(y) \leq \phi_n(z)$.
(ii) f を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき $g_n : \mathrm{Dom}\, f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi_n(f(x))$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数であり、列 g_n は $g_n \leq g_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x)\ \forall x\in\mathrm{Dom}\, f$ を満たす。

証明. (ii) 次の分割を考える。

$$\begin{aligned} &A(n,k) := \{x\in\mathrm{Dom}\, f : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\}\ k = 2,3,\ldots,2^n n \\ &A(n,\infty) := \{x\in\mathrm{Dom}\, f : f(x) \geq n\} \end{aligned}$$

系 1.6 により上にあげた集合はいずれも $\mathcal{B}$ に属する。g_n が非負値 $\mathcal{B}$-単関数であるのは

$$g_n = \sum_{k=2}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{A(n,k):D} + n 1_{A(n,\infty):D} \text{ 但し } D := \mathrm{Dom}\, f$$

よりわかる。あとは $\sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(y) = \max\{y, 0\}\ \forall y\in\overline{\mathbb{R}}$ を使えばよい。 □

次は monotone convergence theorem である。

3.10 定理. $D\in\mathcal{B}$, $D\neq\emptyset$, f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数の列、f を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で $\mathrm{Dom}\, f_n = D\ \forall n$, $\mathrm{Dom}\, f = D$ であるものとする。

$$f_n \leq f_{n+1}\,\forall n\in\mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)\,\forall x\in D \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu = \int f\,\mu.$$

証明. まず各 f_n は非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で $f_n \le f$ を満たすから、補題 3.3(ii) より

$$\int f_n\,\mu \le \int f\,\mu \,\forall n \in \mathbb{N} \text{ 従って } \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_n \mu \le \int \mu.$$

他方 $f_n \le f_{n+1}$ であるから補題 3.9(i) より

$$\phi_n(f_n(x)) \le \phi_{n+1}(f_n(x)) \le \phi_{n+1}(f_{n+1}(x)) \ \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。$k \le n$ なる番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_k \le f_n$ であるから

$$\phi_n(f_k(x)) \le \phi_n(f_n(x)) \ \forall x \in D$$

補題 3.9(ii) より $f_k(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_k(x)) \ \forall x \in D$ であるから

$$f_k(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \ \forall x \in D \,\forall k \in \mathbb{N} \text{ 従って } \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \ \forall x \in D$$

ここで g を非負値 $\mathcal{B}$-単関数で $\operatorname{Dom} g = D$, $g \le f$ を満たすものとしよう。

$$g(x) \le f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_k(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(f_n(x)) \ \forall x \in D$$

合成関数 $x \mapsto \phi_n(f_n(x))$ は非負値 $\mathcal{B}$-単関数なので系 3.8 により

$$\int g\,\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \phi_n \circ f_n\,\mu$$

が得られる。さて $\phi_n(f_n(x)) \le f_n(x)$ であったので補題 3.3(ii) より

$$\int g\,\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \phi_n \circ f_n\,\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu$$

g は非負値 $\mathcal{B}$-単関数で $\operatorname{Dom} g = D$, $g \le f$ であれば任意なので、積分の定義より

$$\int f\,\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mu$$

これと証明冒頭で述べたことを合わせて結論を得る。 □

4 可積分関数とその積分

可積分な可測関数とその積分についていくつか基本的な性質を明らかにする。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

積分と呼ばれるには相応しい性質が備わっていなければならぬ。その一つが線形性である。ただし、関数のとる値として $+\infty$, $-\infty$ も許しているので少々注意が必要である。$\infty - \infty$ を回避するために次のように取り決める。

約束

$\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 f, g に対して条件 $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$, $\{f = +\infty, g = -\infty\} = \emptyset$, $\{f = -\infty, g = +\infty\} = \emptyset$ が成立するときに限って和 $f+g$ を考える。

4.1 補題. f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。和が定義可能なら $f+g$ も $\mathcal{B}$-可測である。

証明. $\{f+g>a\} = \bigcup_{b\in\mathbb{Q}}\{f>b, g>a-b\}$. □

4.2 定理. f, g が非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ なら $\displaystyle\int (f+g)\,\mu = \int f\,\mu + \int g\,\mu$.

証明. 関数 f, g に対して補題 3.9(ii) の手続きで構成される非負値 $\mathcal{B}$ 単関数の列をそれぞれ f_n, g_n とする。このとき非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数の列 f_n+g_n は $f_n+g_n \le f_{n+1}+g_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ を満たし、さらに補題 3.4 により

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x)+g_n(x)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) + \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x)+g(x)\,\forall x\in\mathrm{Dom}\, f$$

従って列 f_n+g_n に定理 3.10 を適用して

$$\int (f+g)\,\mu = \sup \int (f_n+g_n)\,\mu$$

f_n, g_n は非負値 $\mathcal{B}$ 単関数であるから右辺は系 2.11(i) により次に等しい。

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f_n\,\mu + \int g_n\,\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mu + \sup_{n\in\mathbb{N}}\int g_n\,\mu$$

ここで再び補題 3.4 を適用したわけだが、事前に $f_n \le f_{n+1}$ なので $\int f_n\,\mu \le \int f_{n+1}\,\mu$ であると確認するのを怠ってはいけない。列 f_n, g_n それぞれに定理 3.10 を適用して得られる

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mu = \int f\,\mu,\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\int g_n\,\mu = \int g\,\mu$$

の和をとったものがまさに示そうとしていた等式の右辺である。 □

4.3 補題. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。このとき $|f|$, $\max\{f,0\}$, $\max\{-f,0\}$ はいずれも非負値 $\mathcal{B}$-可測関数であって次の同値性が成り立つ。

$$\int |f|\,\mu < +\infty \ \Leftrightarrow\ \int \max\{f,0\}\,\mu < +\infty, \int \max\{-f,0\}\,\mu < +\infty.$$

証明. 関数 $\max\{f,0\}$ の $\mathcal{B}$-可測性を確かめる。それは以下の関係から分かる。

$$\{\max\{f,0\}<a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a\le 0 \\ \{f<a\} & \text{if } a>0 \end{cases}$$

同様にして $\max\{-f,0\}$ の可測性も導ける。さて $|f| = \max\{f,0\}+\max\{-f,0\}$ である。定理 4.2 を使うと $|f|$ の可測性と次の等式を得る。

$$\int |f|\,\mu = \int \max\{f,0\}\,\mu + \int \max\{-f,0\}\,\mu.$$

従って同値性が得られた。 □

約束

$\mathcal{B}$-可測かつ μ-半可積分な関数を今後は $(\mathcal{B},\mu)$-半可積分関数という。

以下、半可積分な可測関数とその積分について基本的な性質を列挙していく。

4.4 定理. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B},\mu)$-半可積分関数とする。

(i) $a\in\mathbb{R}$ に対して af も $(\mathcal{B},\mu)$-半可積分関数であって $\displaystyle\int af\,\mu = a\int f\,\mu.$

(ii) 不等式 $\displaystyle\left|\int f\,\mu\right| \le \int |f|\,\mu$ が成り立つ。$\displaystyle\int |f|\,\mu = 0 \Rightarrow \int f\,\mu = 0$

4.5 定理. f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。

$$f \text{ lower integarble, } \operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g,\, f \le g \Rightarrow g \text{ lower integarble, } \int f\,\mu \le \int g\,\mu.$$

証明. $f\le g$ なので条件 $\max\{f,0\}\le\max\{g,0\}$, $\max\{-g,0\}\le\max\{-f,0\}$ が成り立ち、補題 3.3(ii) が適用できる。すなわち

$$\int \max\{f,0\}\,\mu \le \int \max\{g,0\}\,\mu,\ \int \max\{-g,0\}\,\mu \le \int \max\{-f,0\}\,\mu.$$

右側の各積分は有限の値である。辺々たしあわせて移項すると求める不等式に至る。 □

4.6 定理. f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B},\mu)$-lower integrable function とする。和が定義可能なら $f+g$ も $(\mathcal{B},\mu)$-lower integrable であり次が成り立つ。

$$\int \max\{-f-g,0\}\,\mu \le \int \max\{-f,0\}\,\mu + \int \max\{-g,0\}\,\mu,\ \int (f+g)\,\mu = \int f\,\mu + \int g\,\mu$$

証明. $f(x)=+\infty$, $g(x)=-\infty$ となる x も $f(x)=-\infty$, $g(x)=+\infty$ となる x も存在しない。よって $\max\{-f-g,0\}\le\max\{-f,0\}+\max\{-g,0\}$ であるから、補題 3.3(ii) と定理 4.2 を適用して最初の不等式が得られる。従って $f+g$ も μ-lower integrable である。さらに

$$\max\{f+g,0\}+\max\{-f,0\}+\max\{-g,0\} = \max\{-f-g,0\}+\max\{f,0\}+\max\{g,0\}$$

という関係が成り立ち、定理 4.2 が適用できる。すなわち

$$\begin{aligned}&\int \max\{f+g,0\}\,\mu + \int \max\{-f,0\}\,\mu + \int \max\{-g,0\}\,\mu\\ &= \int \max\{-f-g,0\}\,\mu + \int \max\{f,0\}\,\mu + \int \max\{g,0\}\,\mu\end{aligned}$$

積分 $\int \max\{-f,0\}\,\mu$, $\int \max\{-g,0\}\,\mu$, $\int \max\{-f-g,0\}\,\mu$ は有限の値である。移項すると

$$\begin{aligned}&\int \max\{f+g,0\}\,\mu - \int \max\{-f-g,0\}\,\mu\\ &= \int \max\{f,0\}\,\mu - \int \max\{-f,0\}\,\mu + \int \max\{g,0\}\,\mu - \int \max\{-g,0\}\,\mu\end{aligned}$$

左辺は $f+g$ の積分であり、右辺は f, g それぞれの積分の和である。 □

4.7 注意. 定理 4.6 ではいちいち和が定義可能ならという前提がつくのが何とも煩わしい。これから逃れるには、測度 0 という概念を導入して少し議論する必要がある。少し手間がかかるので、詳しい議論は第 7 節まで先延ばしする。

4.8 補題. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とするとき以下は同値である。

$$\int |f|\,\mu = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

証明. まず $\displaystyle\int |f|\,\mu = 0$ と仮定しよう。補題 3.3(iii) によれば各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(\{|f| \geq 1/n\}) \leq n \int |f|\,\mu = 0$$

が成り立つ。ところで $\{|f| \geq 1/n\} \subset \{|f| \geq 1/(n+1)\}$ なので補題 3.6(i) により

$$\mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f| \geq 1/n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{|f| \geq 1/n\}) = 0.$$

次に $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ と仮定する。非負値 $\mathcal{B}$-単関数 g で $\mathrm{Image}\, g = \mathrm{Image}\, f$, $g \leq |f|$ を満たすものをひとまず固定する。$y > 0$ に対して $g^{-1}\{y\} \subset \{|f| \geq y\} \subset \{f \neq 0\}$ なので補題 3.5(i) より $\mu(g^{-1}\{y\}) = 0$ である。従って $\displaystyle\int g\,\mu = 0$ となり積分の定義より $\displaystyle\int |f|\,\mu = 0$ を得る。 □

4.9 系. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。$\mu(\{f < 0\}) = 0 \Rightarrow f$ μ-lower inegrable.

4.10 補題. f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数とする。$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ なら積 fg も $\mathcal{B}$-可測である。

証明. 関数の値として $+\infty$, $-\infty$ も許すので少し面倒である。$a > 0$ とする。

$$\{0 < fg < a\} = \bigcup_{b\in\mathbb{Q}:b>0} \{0 < f < b, 0 < g < a/b\} \cup \bigcup_{b\in\mathbb{Q}:b<0} \{b < f < 0, a/b < g < 0\}$$

というように可算無限合併で表わせ、さらに

$$\{fg \leq 0\} = \{f \geq 0, g \leq 0\} \cup \{f \leq 0, g \geq 0\}$$

である。従って $a > 0$ のとき

$$\{fg < a\} = \{0 < fg < a\} \cup \{fg \leq 0\} \in \mathcal{B}.$$

次に

$$\{fg < 0\} = \{f > 0, g < 0\} \cup \{f < 0, g > 0\} \in \mathcal{B}.$$

残っているのは $a < 0$ の場合である。このときは $\{fg < a\}$ が

$$\bigcup_{b\in\mathbb{Q}:b>0} \{f > b, g < a/b\} \cup \bigcup_{b\in\mathbb{Q}:b<0} \{f < b, g > a/b\}$$

に等しいことを使えばよい。 □

よって $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $A \in \mathcal{B}$ に対して $A \subset \mathrm{Dom}\, f$ なら $1_{A:\mathrm{Dom}\, f} f$ は $\mathcal{B}$-可測である。また一方、$A \in \mathcal{B}$, $A \neq \emptyset$ に対して定義域の制限 $f|_A$ も $\mathcal{B}$-可測である。

4.11 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $A \in \mathcal{B}$ に対して $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathrm{Dom}\, f$ であるとする。
(i) $1_{A:\mathrm{Dom}\, f} f$ の μ 半可積分性と $f|_A$ の μ 半可積分性は同値である。
(ii) 半可積分なら次が成り立つ。$\displaystyle\int 1_{A:\mathrm{Dom}\, f} f \,\mu = \int f|_A \,\mu.$

証明. まず定義関数に対して確認する。$A, B, D \in \mathcal{B}$ に対し $A \subset D$, $B \subset D$ とする。$A \neq \emptyset$ より $D \neq \emptyset$ であることに注意する。このとき補題 2.13 を適用して次を得る。

$$\int 1_{A:D} 1_{B:D} \,\mu = \int 1_{A\cap B:D} \,\mu = \mu(A \cap B) = \int 1_{A\cap B:A} \,\mu = \int 1_{B:D}|_A \,\mu.$$

系 2.11(i) により f が非負値 $\mathcal{B}$-単関数なら命題が成立することが分かる。一般の非負値 $\mathcal{B}$-可測関数 f については補題 3.9(ii) により非負値 $\mathcal{B}$-単関数の列 g_n で

$$\mathrm{Dom}\, g_n = \mathrm{Dom}\, f,\ g_n \leq g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x)\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int 1_{A:\mathrm{Dom}\, f} g_n \,\mu = \int g_n|_A \,\mu$$

なので定理 3.10 を適用して結論に至る。 □

4.12 注意. 0 と ∞ の積は 0 という約束により $1_{A:\mathrm{Dom}\, f}(x) f(x) = 0\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f \setminus A$ である。

4.13 定義. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $A \in \mathcal{B}$ に対して $A \subset \mathrm{Dom}\, f$ とする。$A \neq \emptyset$ かつ $f|_A$ が μ-半可積分のとき f は可測集合 A 上で μ-半可積分という。さらにこのとき

$$\int_A f \,\mu := \int f|_A \,\mu.$$

を f の可測集合 A 上での積分という。便宜上、空集合 $\emptyset$ 上では無条件で f は μ-半可積分であると見なし積分については $\int_\emptyset f \,\mu = 0$ と約束する。

4.14 注意. $\int_\emptyset f \,\mu = 0$ と約束することにより補題 4.11(ii) は $A = \emptyset$ の場合も込めて

$$\int 1_{A:\mathrm{Dom}\, f} f \,\mu = \int_A f \,\mu$$

という形で成立する。

4.15 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $A \in \mathcal{B}$ に対して $A \subset \mathrm{Dom}\, f$ とする。
(i) f 非負値 $\Rightarrow \displaystyle\int f \,\mu = \int_A f \,\mu + \int_{\mathrm{Dom}\, f\setminus A} f \,\mu.$
(ii) f は μ-lower integrable $\Leftrightarrow$ f は A 上および $\mathrm{Dom}\, f \setminus A$ 上で μ-lower integrable
(iii) f は μ-semi integrable $\Rightarrow \displaystyle\int f \,\mu = \int_A f \,\mu + \int_{\mathrm{Dom}\, f\setminus A} f \,\mu.$

証明. $D := \mathrm{Dom}\, f$ とおく。$f = 1_{A:D}f + 1_{D\setminus A:D}f$ なので定理 4.2 と補題 4.11 を適用して (i) が導ける。また $\max\{-f, 0\}$ に (i) を適用して (ii) を得る。(iii) は定理 4.6 と (ii) から導ける。 □

4.16 系. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f と $N, A \in \mathcal{B}$ に対して $N, A \subset \mathrm{Dom}\, f$ とする。
(i) $\mu(N) = 0 \Rightarrow f$ は N 上で μ-可積分かつ $\displaystyle\int_N f\,\mu = 0.$
(ii) f μ-semi integrable on A, $\mu(\mathrm{Dom}\, f \setminus A) = 0 \Rightarrow f$ μ-semi integrable, $\displaystyle\int f\,\mu = \int_A f\,\mu.$

証明. (i) $D := \mathrm{Dom}\, f$ とおく。$\{1_{N:D}f \neq 0\} \subset N$ であるから補題 3.5(i) より、$\{1_{N:D}f \neq 0\}$ は μ 零集合である。従って補題 4.8 を適用して $\displaystyle\int |1_{N:D}f|\,\mu = 0$ を得る。とくに $1_{N:D}f$ は μ-可積分である。さらに定理 4.4(ii) と補題 4.11 より $\displaystyle\int_N f\,\mu = 0$ が従う。
(ii) $\mu(D \setminus A) = 0$ なので補題 4.15 と (i) を適用して結論を得る。 □

5 Lebesgue の収束定理

この節で扱う収束定理の明解さの根元にあるのが定理 3.10 すなわち**単調収束定理**である。

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

5.1 補題. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f_n を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数の列で $\mathrm{Dom}\, f_n = D\ \forall n$ とする。
(i) 以下の関数 $D \to \overline{\mathbb{R}}$ はすべて $\mathcal{B}$-可測である。

$$x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x), x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

(ii) 各 f_n が非負値であるなら関数 $D \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathcal{B}$-可測である。

証明. $\{x : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) > a\}$. □

次は項別積分定理 (term-by-term integration) であるが、非負性に留意せよ。

5.2 補題. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f_n を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数の列で $\mathrm{Dom}\, f_n = D\ \forall n$ とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mu.$$

証明. 正項級数については $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k$ であるから定理 4.2 と定理 3.10 に帰着する。 □

5.3 定理. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数で $\mathrm{Dom}\, f = D$ とする。
(i) 関数 $\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \mapsto \int_{A\cap D} f\,\mu$ は測度である。**積分の σ-加法性**
(ii) 任意の非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数 g に対して次が成り立つ。

$$\int g\,\nu = \begin{cases} \displaystyle\int g|_{\mathrm{Dom}\, g\cap D} f|_{\mathrm{Dom}\, g\cap D}\,\mu & \mathrm{Dom}\, g \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \mathrm{Dom}\, g \cap D = \emptyset \end{cases}$$

絶対連続測度による積分

証明. (i) $A_n \in \mathcal{B}\ n \in \mathbb{N}$ かつ $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m$ とする。$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とかくと $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n \cap D:D} f = 1_{A \cap D:D} f$ であるから、補題 4.11 と補題 5.2 を適用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap D} f\, \mu = \int_{A \cap D} f\, \mu = \nu(A)$$

を得るが、これは σ 加法性に他ならない。

(ii) まず定義関数に対して確認する。$A, E \in \mathcal{B}$ に対し $A \subset E,\ E \neq \emptyset$ とする。$E \cap D \neq \emptyset$ とき補題 4.11 を適用し $1_{A \cap D:E \cap D} = 1_{A:E}|_{E \cap D}$ に注意すると次を得る。

$$\int_{A \cap D} f\, \mu = \int 1_{A \cap D:E \cap D} f|_{E \cap D}\, \mu = \int 1_{A:E}|_{E \cap D} f|_{E \cap D}\, \mu.$$

従って次が成り立ち、定義関数 $1_{A:E}$ に対して確認できた。

$$\int 1_{A:E}\, \nu = \nu(A) = \int_{A \cap D} f\, \mu = \begin{cases} \int 1_{A:E}|_{E \cap D} f|_{E \cap D}\, \mu & E \cap D \neq \emptyset \\ 0 & E \cap D = \emptyset \end{cases}$$

さらに系 2.11(i) により f が非負値 $\mathcal{B}$-単関数なら命題が成立することが分かる。一般の場合には $E := \mathrm{Dom}\, g$ とおくと補題 3.9(ii) により非負値 $\mathcal{B}$-単関数の列 g_n で

$$\mathrm{Dom}\, g_n = E,\ g_n \leq g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = g(x)\ \forall x \in E$$

を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int g_n\, \nu = \begin{cases} \int g_n|_{E \cap D} f|_{E \cap D}\, \mu & E \cap D \neq \emptyset \\ 0 & E \cap D = \emptyset \end{cases}$$

なので定理 3.10 を適用して結論に至る。 □

次は *Fatou* **の補題**と呼ばれるが、事実上は定理と冠されるに相応しい内容を持つ。

5.4 定理. $D \in \mathcal{B},\ D \neq \emptyset,\ f_n$ を非負値 $\mathcal{B}$-可測関数の列で $\mathrm{Dom}\, f_n = D\ \forall n$ とする。

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n\, \mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n\, \mu.$$

証明. 非負値 $\mathcal{B}$-可測関数列 $\inf_{k \geq n} f_k$ に定理 3.10 が適用できるので

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n\, \mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k\, \mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \inf_{k \geq n} f_k\, \mu$$

を得る。他方、補題 3.3(ii) より

$$\int \inf_{k \geq n} f_k\, \mu \leq \int f_k\, \mu\ \forall k \geq n \text{ 従って } \int \inf_{k \geq n} f_k\, \mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k\, \mu$$

以上を組み合わせて結論に至る。 □

次の定理は *Lebesgue* **の優収束定理**(Lebesgue dominated convergence theorem) である。

5.5 定理. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数、f_n を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}, \mu)$-可積分関数の列で

$$\operatorname{Dom} f_n = D \ \forall n,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in D$$
$$\exists g \ (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分 s.t. } |f_n(x)| \leq g(x) \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in D,$$

を満たすものとする。このとき数列 $\displaystyle\int f_n \, \mu$ は $\displaystyle\int f \, \mu$ に収束する。

証明. 補題 3.3(iv) より $A := \{g < +\infty\} \in \mathcal{B}$, $\mu(D \setminus A) = 0$ である。系 4.16(ii) を適用して

$$(\star) \qquad \int f_n \, \mu = \int_A f_n \, \mu, \ \int f \, \mu = \int_A f \, \mu$$

を得る。$A = \emptyset$ なら自明なので以下では $A \neq \emptyset$ として議論を進める。さて $|f_n| \leq g$ かつ $g(x) < +\infty \ \forall x \in A$ なので $g|_A + f_n|_A$ は定義可能で、非負値である。$g|_A + f|_A$ についても同様のことがいえる。定理 5.4 より

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g|_A + f_n|_A) \, \mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g|_A + f_n|_A) \, \mu.$$

仮定より $\liminf_{n\to\infty}(g|_A + f_n|_A) = g|_A + f|_A$ なので定理 4.6 も考慮に入れて

$$\int_A g \, \mu + \int_A f \, \mu \leq \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_A g \, \mu + \int_A f_n \, \mu \Big)$$

を得る。各積分は有限の値であるから移項してさらに $(\star)$ とあわせて

$$\int f \, \mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mu$$

が導ける。$g|_A - f_n|_A$ についても同様の考察をすることにより

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mu \leq \int f \, \mu$$

が示せるので、$\displaystyle\int f_n \, \mu$ は $\displaystyle\int f \, \mu$ に収束する。 □

Fatou の補題と Lebesgue の収束定理を組み合わせて次の形で利用することも多く *Lebesgue-Fatou* **の補題**と呼ばれる。その証明は定理 5.5 のものと重複するので省略する。

5.6 定理. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$, f_n を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}, \mu)$-lower integrable function の列で次を満たすものとする。

$$\operatorname{Dom} f_n = D \ \forall n, \exists g \ (\mathcal{B}, \mu)\text{-可積分 s.t. } f_n(x) \geq g(x) \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in D.$$

このとき $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} f_n$ は $(\mathcal{B}, \mu)$-lower integrable で、$\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mu$ が成り立つ。

6　測度 0 の集合

測度論的な積分においてキーとなるほとんどいたるところという概念を紹介する。

前提

$(\mathcal{B},\mu)$ を measure であって $\mathcal{B}\neq\{\emptyset\}$ なものとする。

6.1 補題. $D\in\mathcal{B}$, $D\neq\emptyset$, f_n を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B},\mu)$-lower integrable function の列とする。このとき $\operatorname{Dom} f_n = D\ \forall n$, $f_n\le f_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mu<+\infty$ なら $\mu(\{\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n=+\infty\})=0$ である。

証明. 定理 3.10 と補題 3.3(iv) □

6.2 定義. 次の条件を満たす集合 N を $(\mathcal{B},\mu)$ **零集合**(null set) とよぶ。

$$\exists B\in\mathcal{B}\text{ s.t. }\mu(B)=0, N\subset B$$

また $D\in\mathcal{B}$ と $A\subset D$ に対して $D\setminus A$ が $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合であるとき A は D に関して $(\mathcal{B},\mu)$-*a.e.* **集合**であるという。通常は集合 D が何を指すかは前後関係から判断できるので伏せておかれることが多く、μ-a.e. と略記する。

6.3 例. 補題 4.8 および補題 6.1 はそれぞれ次のように表現される。

- $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数 f に対して $\displaystyle\int|f|\,\mu=0$ は $f=0$ μ-a.e. と同値である。
- $D\in\mathcal{B}$, $D\neq\emptyset$ と非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数の列 f_n が条件 $\operatorname{Dom} f_n = D\ \forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\le f_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mu<+\infty$ を満たすなら $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n<+\infty$ μ-a.e. である。

6.4 注意. $\mathcal{B}$ が $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合すべてを含む場合、測度 $(\mathcal{B},\mu)$ は**完備**(complete) であるという。$(\mathcal{B},\mu)$ 零集合は必ずしも $\mathcal{B}$ に属していないので次の補題が意味を持つ。

6.5 補題. $N\in\mathcal{B}$ である場合は A が $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合とは $\mu(N)=0$ に他ならない。

証明. $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合であれば $\mu(B)=0$, $N\subset B$ を満たす $B\in\mathcal{B}$ が存在する。$N\in\mathcal{B}$ であるから補題 3.5(i) を適用して $0\le\mu(N)\le\mu(B)=0$ と推論できる。 □

6.6 補題. f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g$ とする。このとき $\{f<g\}$, $\{f\le g\}$, $\{f=g\}$ のいずれの集合も $\mathcal{B}$ に属する。

証明. $\{f<g\}=\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}\{f<a\le g\}$ □

6.7 定理. $A\in\mathcal{B}$, f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $A\subset\operatorname{Dom} f\cap\operatorname{Dom} g$ とする。

$$f\text{ lower integrable on }A,\ f\le g\text{ a.e. on }A\Rightarrow g\text{ lower integrable on }A,\ \int_A f\,\mu\le\int_A g\,\mu.$$

証明. $A=\emptyset$ なら自明なので $A\neq\emptyset$ と仮定する。

$$B:=\{x\in A: f(x)\le g(x)\}$$

とおく。$B=\emptyset$ かも知れないが、そのときは $\mu(A)=0$ であり結論はやはり自明である。以下 $B\neq\emptyset$ として議論を進める。$\mu(A\setminus B)=0$ なので系 4.16(ii) を適用して

$$\int_A f\,\mu=\int f|_A\,\mu=\int_B f|_A\,\mu=\int (f|_A)|_B\,\mu=\int f|_B\,\mu=\int_B f\,\mu$$

を得る。ここで定理 4.5 を適用する。集合 B の決め方により g は B 上 lower integrable かつ $\displaystyle\int_B f\,\mu\le\int_B g\,\mu$ であることを得る。従って系 4.16(ii) により g は A 上 lower integrable である。また上と同様の変形により後者は $\displaystyle\int_A g\,\mu$ に等しい。 □

6.8 系. $A\in\mathcal{B}$, f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $A\subset\operatorname{Dom} f\cap\operatorname{Dom} g$ とする。

$$f \text{ semi integrable on } A,\ f=g\ \mu\text{-a.e. on } A\Rightarrow g \text{ semi integrable on } A,\ \int_A f\,\mu=\int_A g\,\mu.$$

6.9 注意. 定理 6.7 は以下の**可積分性判定**に関する手順を提供する。

$$|f|\le g\ \mu\text{-a.e.} \text{ かつ } \int g\,\mu<+\infty \text{ であるなら } f \text{ は } \mu \text{ 可積分である。}$$

次は**項別積分定理**である。以前の補題 5.2 と異なり被積分関数に非負値性は要求しないがその代わりとなる条件が付いている点に注意されたい。

6.10 定理. $D\in\mathcal{B}$, $D\neq\emptyset$ と $\mathbb{R}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数 f_n （$\overline{\mathbb{R}}$ でないことに注目）の列が $\operatorname{Dom} f_n=D$ $\forall n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\int|f_n|\,\mu<+\infty$ をみたすとする。このとき以下が成り立つ。

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty|f_n|<+\infty$ μ-a.e., $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k$ と $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k$ は μ-可積分

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\int f_n\,\mu$ は絶対収束かつ $\displaystyle\int\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k\,\mu=\sum_{n=1}^\infty\int f_n\,\mu=\int\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k\,\mu.$

証明. 非負値関数 $\sum_{n=1}^\infty|f_n|$ は $(\mathcal{B},\mu)$ 可積分である。なぜなら補題 5.2 を適用すると

$$\int\sum_{n=1}^\infty|f_n|\,\mu=\sum_{n=1}^\infty\int|f_n|\,\mu<+\infty.$$

従って補題 3.3(iv) により関数項級数は μ-a.e. 絶対収束している。しかも次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^n f_k(x)\ge-\sum_{k=1}^\infty|f_k(x)|\ \forall x\in D\,\forall n\in\mathbb{N},\ \int\sum_{k=1}^n f_k\,\mu\le\sum_{n=1}^\infty\int|f_n|\,\mu\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

よって定理 5.6 を適用して $\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k$ の μ 可積分性と

$$\int\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k\,\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^n f_k\,\mu=\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\int f_k\,\mu$$

を得る。同様の議論により $\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k$ の μ 可積分性と

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k\,\mu \le \int \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k\,\mu$$

を得る。さて次の包含関係が成り立ち、前者は D に関して $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合である。

$$\{x\in D : \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty\}\subset\{x\in D : \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\}$$

ゆえに系 6.8 を適用して結論に至る。 □

この節を閉じるにあたって $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合の重要な性質を述べる。またそれらの典型的な適用例についてもふれる。まずその定義から直ちに分かることは次の通り。

(i) A $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合、$B\subset A \Rightarrow B$ $(\mathcal{B},\mu)$ 零集合
(ii) A D に関して $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合、$A\subset B \Rightarrow B$ D に関して $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合

6.11 補題. $A_n\in\mathcal{B}\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. **劣加法性**(subadditivity)

証明. $B:=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおくと $1\le\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n:B}$ が成り立つ。よって補題 3.3(ii) と補題 5.2 を適用して結論を得る。 □

6.12 系. (i) A_n $(\mathcal{B},\mu)$-零集合 $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-零集合
(ii) A_n D に関して $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合 $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow D$ に関して $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合

6.13 例. 単調収束定理の拡張。$D\in\mathcal{B}$, $D\ne\emptyset$ かつ f_n を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数の列とする。

$$\operatorname{Dom} f_n=D, 0\le f_n\le f_{n+1}\ \mu\text{-a.e.}\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\int\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n\,\mu=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mu.$$

証明. $A:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{0\le f_n\le f_{n+1}\}\in\mathcal{B}$ である。関数列 $f_n|_A$ に対して定理 3.10 を適用する。

$$\int_A\sup_{n\in\mathbb{N}}f_n\,\mu=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_A f_n\,\mu.$$

系 6.12(ii) によれば A は $(\mathcal{B},\mu)$-a.e. 集合である。従って系 4.16 を使って結論を得る。 □

6.14 補題. f, g, h を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$-可測関数で $\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g=\operatorname{Dom} h$ とする。
(i) $f\le g$ μ-a.e., $g\le f$ μ-a.e. $\Rightarrow f=g$ μ-a.e. (ii) $f\le g$ μ-a.e., $g\le h$ μ-a.e. $\Rightarrow f\le h$ μ-a.e.

証明. (i) $\{f\le g\}\cap\{g\le f\}=\{f=g\}$. 系 6.12(ii) を適用 □

$a<+\infty$ かつ $b>-\infty$ のとき $a\le b\Leftrightarrow a-b\le 0$ であることに注意する。

6.15 定理. $D\in\mathcal{B}$, $D\ne\emptyset$ かつ f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $D=\operatorname{Dom} f=\operatorname{Dom} g$ とする。

$$f\text{ upper integrable, }g\text{ lower integarble, }\int_{A\cap D}f\,\mu\le\int_{A\cap D}g\,\mu\ \forall A\in\mathcal{B}\Rightarrow f\le g\ \mu\text{-a.e.}$$

証明. f は upper integrable かつ g は lower integrable なので

$$B := \{x \in D : f(x) < +\infty, g(x) > -\infty\} \in \mathcal{B} \text{ かつ } \mu(D \setminus B) = 0$$

もし $\{x \in B : g(x) < f(x)\} = \emptyset$ なら $\{x \in B : f(x) \leq g(x)\}$ は μ-a.e. 集合である。よって $\{x \in B : g(x) < f(x)\} \neq \emptyset$ と仮定しこれを A に選び議論を進める。このとき $B \neq \emptyset$ であることに注意する。補題 4.15(i) を適用して

$$\int \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu = \int_A \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu + \int_{B\setminus A} \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu.$$

さて $B \setminus A \neq \emptyset$ なら $\max\{f|_B - g|_B, 0\}|_{B\setminus A} = 0$ であるからいずれにしても

$$\int_{B\setminus A} \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu = 0$$

が成り立つ。他方 $\max\{f|_B - g|_B, 0\}|_A = f|_A - g|_A$ であるから

$$0 \leq \int \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu = \int_A (f - g)\, \mu = \int_A f\, \mu - \int_A g\, \mu.$$

２番目の等号は定理 4.6 による。和が非負値であるから、$\int_A f\, \mu = -\infty$ あるいは $\int_A g\, \mu = +\infty$ という可能性は排除される。従って

$$-\infty < \int_A f\, \mu < +\infty, -\infty < \int_A g\, \mu < +\infty.$$

さて $\int_A f\, \mu \leq \int_A g\, \mu$ であったので

$$0 \leq \int \max\{f|_B - g|_B, 0\}\, \mu = \int_A f\, \mu - \int_A g\, \mu \leq 0.$$

ここで補題 4.8 を適用することにより

$$\max\{f|_B - g|_B, 0\} = 0 \ \mu\text{-a.e.}$$

が導かれる。これは $f|_B \leq g|_B$ μ-a.e. を意味する。一方すでに確かめたように B は D に関して μ-a.e. なので結論 $f \leq g$ μ-a.e. を得る。 □

6.16 注意*.* f lower integrable, $\int f\, \mu < +\infty \Rightarrow f$ integrable であり、g upper integarble, $\int g\, \mu > -\infty \Rightarrow g$ integrable である。従って定理 6.15 より次も成り立つ。

$$f \text{ lower integrable, } g \text{ upper integarble, } \int_{A\cap D} f\, \mu \leq \int_{A\cap D} g\, \mu \ \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f \leq g \ \mu\text{-a.e.}$$

6.17 系. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$ かつ f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}, \mu)$ 可積分関数で $D = \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ とする。

$$\int_{A\cap D} f\, \mu = \int_{A\cap D} g\, \mu \ \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f = g \ \mu\text{-a.e.}$$

6.18 定理. $D \in \mathcal{B}$, $D \neq \emptyset$ かつ f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $D = \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ とする。

$$f, g \text{ semi integrable}, \ \mu(D) < +\infty \text{ and } \int_{A \cap D} f\, \mu \leq \int_{A \cap D} g\, \mu \ \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow f \leq g \ \mu\text{-a.e.}$$

証明. 定理 6.15 および注意 6.16 のいずれでもカバーされていないのは f, g ともに lower integrable あるいは f, g ともに upper integrable の場合である。議論は同様なので f, g ともに lower integrable として話を進める。$n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する。このとき $\mu(D) < +\infty$ により $g|_{g \leq n}$ は upper integarble である。注意 6.16 を適用して $f|_{g \leq n} \leq g|_{g \leq n}$ μ-a.e. をえる。$n \in \mathbb{N}$ は任意であるから

$$f \leq g \ \mu\text{-a.e. on } \{x \in D : g(x) < +\infty\}$$

また $\{x \in D : g(x) = +\infty\}$ 上では $f \leq g$ は自明に成り立つ。 □

7 可積分関数のなす空間

前提

$(\mathcal{B}, \mu)$ を measure であって $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ なものとする。

ここまで複素数値関数を避けてきたが、いろいろ不便が生じるので対処しておこう。

記号

$\alpha \in \mathbb{C}$ についてその実部を $\mathrm{Re}\, \alpha$ 虚部を $\mathrm{Im}\, \alpha$ と表記する。即ち $\alpha = \mathrm{Re}\, \alpha + \sqrt{-1}\, \mathrm{Im}\, \alpha$

7.1 定義. $\mathbb{C}$ 値関数 f の $\mathcal{B}$ 可測性あるいは μ 可積分性は $x \mapsto \mathrm{Re}\, f(x)$ と $x \mapsto \mathrm{Im}\, f(x)$ の両方がそれぞれ対応する性質を持つことをいう。$\mathcal{B}$ 可測かつ μ 可積分なとき f の μ についての積分を次で定義する。

$$\int f\, \mu := \int \mathrm{Re}\, f\, \mu + \sqrt{-1} \int \mathrm{Im}\, f\, \mu.$$

複素数に関わるときは面倒をさけるため値 ∞ を除外しておく。多くの場合、複素数値関数の積分に関する命題は実部と虚部に分けて実数値バージョンの命題を適用すれば導ける。さて $p \in \mathbb{R}_{>0}$ と $\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数 f に対して関数 $x \mapsto |f(x)|^p$ も $\mathcal{B}$ 可測である。

7.2 定義. $p \in \mathbb{R}_{>0}$ とする。$\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数 f について関数 $|f|^p$ が μ 可積分であるとき f は p **乗可積分**であるという。

7.3 補題. f, g を $\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数で $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$ とする。
(i) $a, b \in \mathbb{C}$ とする。線形結合 $af + bg$ も $\mathcal{B}$ 可測である。また f, g ともに μ 可積分なら $af + bg$ も μ 可積分であり次が成り立つ。

$$\int (af + bg)\, \mu = a \int f\, \mu + b \int g\, \mu \text{ 複素線形性}$$

(ii) f の μ 可積分性は条件 $\int |f|\, \mu < +\infty$ と同値であり、μ 可積分なら次が成り立つ。

$$\left| \int f\, \mu \right| \leq \int |f|\, \mu.$$

証明. (ii) 一般に $z \in \mathbb{C}$ に対して $|z| = \max\{\mathrm{Re}(\overline{a}z); a \in \mathbb{C}, |a| = 1\}$ である（$\overline{a}$ は a の複素共役)。そこで $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$ とする。(i) と定理 4.5 により

$$\mathrm{Re}\left(\overline{a}\int f\,\mu\right) = \int \mathrm{Re}(\overline{a}f)\,\mu \leq \int |f|\,\mu.$$

左辺の a に関する最大値が $|\int f\,\mu|$ である。 □

7.4 補題. $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ かつ $1/p + 1/q = 1$ とする。
(i) $(a+b)^p \leq t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p\ \forall t \in \mathbb{R}_{(0,1)}$ である。
(ii) $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p t^{p-1} + \dfrac{1}{q}b^q\dfrac{1}{t}\ \forall t \in \mathbb{R}_{>0}$ である。
(iii) さらに $a > 0$, $b > 0$ とせよ。(i) において等号が成立するのは $t = a/(a+b)$ のときに限りまた (ii) において等号が成立するのは $t = b^{q-1}/a$ のときに限る。

7.5 定理. $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ かつ $1/p + 1/q = 1$ とする。$\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数 f, g, h について $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g = \mathrm{Dom}\, h$ であり f, g は p 乗可積分、h は q 乗可積分であるとする。
(i) 和 $f + g$ は p 乗可積分、積 fh は可積分である。
(ii) $\left(\int |f+g|^p\,\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\,\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\,\mu\right)^{1/p}$ が成り立つ。*Minkowski* **の不等式**
(iii) $|\int fh\,\mu| \leq \left(\int |f|^p\,\mu\right)^{1/p}\left(\int |h|^q\,\mu\right)^{1/q}$ が成り立つ。*Hölder* **の不等式**

証明. (i) 補題 7.4(i) において $t = 1/2$ としたものと補題 7.4(ii) において $t = 1$ としたものから次が成り立つことが分かる。

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p), |fh| \leq |f|^p/p + |h|^q/q$$

(ii) 補題 7.4(i) を適用して

$$\int (|f| + |g|)^p\,\mu \leq t^{1-p}\int |f|^p\,\mu + (1-t)^{1-p}\int |g|^p\,\mu\ 0 < \forall t < 1.$$

他方 $a, b \geq 0$ に対して $\inf_{0<t<1}\{t^{1-p}a + (1-t)^{1-p}b\} = (a^{1/p} + b^{1/p})^p$ である。
(iii) (ii) と同様であるが今度は補題 7.4(ii) と補題 7.3(iii) を適用する。 □

記号

$X \in \mathcal{B}$, $\mu(X) > 0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。$\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数 f であって $\mathrm{Dom}\, f \subset X$, $\mu(X \setminus \mathrm{Dom}\, f) = 0$ かつ p 乗 μ 可積分なもの全体を $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ と書く。

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) \text{ に対して } \|f\|_p := \left(\int |f|^p\,\mu\right)^{1/p}$$

7.6 定義. $\mathbb{C}$ 値 $\mathcal{B}$ 可測関数の組 f, g であって $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \neq \emptyset$ をみたすものに対して次で定義される関数をそれぞれ $f + g$, fg と書く。

$$\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x) + g(x);\ \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)g(x).$$

$a \in \mathbb{C}$ に対するスカラー倍は通常通り定義する。

7.7 定義. L を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする。
(i) L 上の関数 $f \mapsto \|f\|$ で次の 3 条件を満たすものを *semi-norm* という。

1° $\|f\| \geq 0$ $\forall f \in L$
2° $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $\forall f, \forall g \in L$.
3° $\|af\| = |a|\|f\|$ $\forall a \in \mathbb{C}, \forall f \in L$.

(ii) $\sim$ を L 上の同値関係とする。$\sim$ が線形構造と両立するとは次が成り立つことを言う。

$$f, g \in L,\ f \sim g \Rightarrow f+h \sim g+h\ \forall h \in L,\ af \sim ag\ \forall a \in \mathbb{C}$$

7.8 補題. $X \in \mathcal{B}$, $\mu(X) > 0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。
(i) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ は線形空間をなし、関数 $f \mapsto \|f\|_p$ はそれ上の semi-norm である。
(ii) $f - g = 0$ μ-a.e. によって $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ に導入される 2 項関係は同値関係である。さらにそれは線形構造と両立し、0 の同値類は $\{f : \|f\|_p = 0\}$ と一致する。
(iii) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\ \mu$ は複素線形であり、$|\int f\, \mu| \leq \|f\|_1$ $\forall f \in \mathcal{L}^1$ が成り立つ。
(iv) $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ かつ $1/p + 1/q = 1$ とする。$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{B}, \mu)$ なら $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ である。$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) \times \mathcal{L}^q(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $(f, g) \mapsto fg$ は複素双線形であり、$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ $\forall f \in \mathcal{L}^p$ $\forall g \in \mathcal{L}^q$ が成り立つ。

証明. (i) $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ とする。系 6.12(ii) により $\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$ も X に関して μ-a.e. 集合である。そこで系 4.16(ii) を適用して次を得る。

$$\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |f|^p\ \mu = \int |f|^p\ \mu < +\infty, \int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |g|^p\ \mu = \int |g|^p\ \mu < +\infty.$$

従って定理 7.5(i) により $f + g$ も p 乗 μ 可積分となり、$f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ が分かる。一方、

$$\Big(\int |f+g|^p\, \mu \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |f|^p\, \mu \Big)^{1/p} + \Big(\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |g|^p\, \mu \Big)^{1/p}$$

が定理 7.5(ii) により成り立つので $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ が導かれる。
(ii) 0 の同値類が $\{f : \|f\|_p = 0\}$ に等しいことは補題 4.8 から分かる。
(iii) $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ とする。系 6.12(ii) と系 4.16(ii) を適用して次を得る。

$$\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} f\ \mu = \int f\ \mu, \int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} g\ \mu = \int g\ \mu.$$

従って補題 7.3(i) により複素線形性が導かれる。後半部は補題 7.3(ii) に他ならない。
(iv) $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{B}, \mu)$ とする。同様に次が成り立つ。

$$\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |f|^p\ \mu = \int |f|^p\ \mu < +\infty, \int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |g|^q\ \mu = \int |g|^p\ \mu < +\infty.$$

従って定理 7.5(i) により fg も μ 可積分となり、$fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ が分かる。一方、

$$\int |fg|\, \mu \leq \Big(\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |f|^p\, \mu \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g} |g|^q\, \mu \Big)^{1/q}$$

が定理 7.5(iii) により成り立つので $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が導かれる。 $\square$

約束

$p \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $+\infty^p = +\infty$ と約束する。

7.9 補題. $X \in \mathcal{B}$, $\mu(X) > 0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。
(i) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{B}$ 可測かつ p 乗 μ 可積分とする。このとき $f|_{f^{-1}\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ である。
(ii) 次の写像（単射ではない）の像は $\{g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) : g(x) \in \mathbb{R}\ \forall x\}$ である。

$$\{f : X \to \overline{\mathbb{R}}\ \mathcal{B}\text{ 可測かつ } p \text{ 乗 } \mu \text{ 可積分}\} \to \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu), f \mapsto f|_{f^{-1}\mathbb{R}}$$

証明. (i) 補題 3.3(iv) により $f^{-1}\mathbb{R}$ は X に関して μ-a.e. 集合である。 □

次の定理は L^p **空間の完備性**を述べるもので *Riesz-Fischer* **の定理**と呼ばれる。これは測度論的設定が大成功を納めた典型例である。

7.10 定理. $X \in \mathcal{B}$, $\mu(X) > 0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。f_n を $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ の元からなる列で Cauchy の条件 $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0$ をみたすものとする。このとき $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$ が成り立つ。また $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_p = 0$ であるような $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ の全体は f の同値類と一致する。

証明. Cauchy の条件により任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ と $K \in \mathbb{N}$ に対してある $m \in \mathbb{N}$ で $m \geq K$ かつ $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon\ \forall n > m$ を満たすものが存在する。従って帰納的に自然数列 $\alpha(k)$ で

$$\alpha(k) < \alpha(k+1)\,\forall k \in \mathbb{N}, \|f_n - f_{\alpha(k)}\|_p < 1/2^k\,\forall n > \alpha(k)\ \forall k \in \mathbb{N}$$

を満たすものが構成できる。一般に $\||h|\|_p = \|h\|_p\ \forall h \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ であるから、補題 7.8(i) を適用すると非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数 $g_k := \sum_{i=1}^k |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|$ について次の評価を得る。

$$\int (g_k)^p\ \mu = (\|g_k\|_p)^p \leq \Big(\sum_{i=1}^k \|f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}\|_p\Big)^p \leq \Big(\sum_{i=1}^k 1/2^i\Big)^p \leq 1$$

系 6.12(ii) により $D := \bigcap_{k=1}^\infty \operatorname{Dom} g_k = \bigcap_{i=1}^\infty \operatorname{Dom} f_{\alpha(i)}$ も X に関して μ-a.e. 集合である。ここで次の非負値 $\mathcal{B}$ 可測関数 g を導入する。

$$g : D \to \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \sum_{k=1}^\infty |f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x)|$$

$g_k|_D \leq g_{k+1}|_D$ かつ $g^p = \sup_{k\in\mathbb{N}}(g_k|_D)^p$ であるから定理 3.10 により g は p 乗 μ 可積分である。従って補題 3.3(iv) を適用すると

$$A := \{x \in D : \sum_{k=1}^\infty |f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x)| < +\infty\} \in \mathcal{B}$$

は D に関して μ-a.e. 集合であることが分かる。また A は X に関しても μ-a.e. 集合である。$x \in A$ なら級数 $\sum_{k=1}^\infty (f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(k)}(x))$ は絶対収束し、その部分和について

$$\text{第 } k \text{ 部分和} = f_{\alpha(k+1)}(x) - f_{\alpha(1)}(x)$$

である。次の $\mathcal{B}$ 可測関数 f を導入する。

$$f : A \to \mathbb{C}, x \mapsto \lim_{k\to\infty} f_{\alpha(k)}(x)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ をひとまず固定する。$x \in A$ なら級数和は $f(x) - f_{\alpha(1)}(x)$ に等しいので

$$|f(x) - f_{\alpha(k)}(x)| \leq \sup_{l\in\mathbb{N}:l>k} \sum_{i=k}^{l} |f_{\alpha(i+1)}(x) - f_{\alpha(i)}(x)| \ \forall x \in A$$

が成り立つ。特に $|f(x) - f_{\alpha(1)}(x)| \leq g(x)\ \forall x \in A$ であるから g の p 乗 μ 可積分性と定理 4.5 により $f - f_{\alpha(1)} \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ を得る。従って補題 7.8(i) より $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ である。定理 4.5 と定理 3.10 を適用して次を得る。

$$(\|f - f_{\alpha(k)}\|_p)^p = \int_A |f - f_{\alpha(k)}|^p \ \mu \leq \int_A \sup_{l\in\mathbb{N}:l>k} \Big(\sum_{i=k}^{l} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|\Big)^p \ \mu$$

$$= \sup_{l\in\mathbb{N}:l>k} \int_A \Big(\sum_{i=k}^{l} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|\Big)^p \ \mu = \sup_{l\in\mathbb{N}:l>k} \Big(\Big\|\sum_{i=k}^{l} |f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}|\Big\|_p\Big)^p$$

ここで A は X に関して μ-a.e. 集合であることを使った。再び $\||h|\|_p = \|h\|_p\ \forall h \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ に注意して補題 7.8(i) を適用する。右辺は次のものでおさえられる。

$$\sup_{l\in\mathbb{N}:l>k} \Big(\sum_{i=k}^{l} \|f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}\|_p\Big)^p \leq \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i}\Big)^p = \frac{1}{2^{(k-1)p}}$$

$n \in \mathbb{N}$ かつ $n > \alpha(k)$ とする。$\|f_n - f_{\alpha(k)}\|_p < 1/2^k$ であったので

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{\alpha(k)}\|_p + \|f_{\alpha(k)} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}$$

最初の不等号は補題 7.8(i) による。よって $\|f - f_n\|_p$ は 0 に収束する。さて補題 7.8(i) より

$$\{g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) : \lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_p = 0\} = \{g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) : \|g - f\|_p = 0\}$$

が成り立つ。補題 7.8(ii) によれば右辺は f の同値類に等しい。 □

記号

$X \in \mathcal{B}, \mu(X) > 0, p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。線形空間 $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ の同値関係 $f - g = 0$ μ-a.e. による商空間を $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ と書く。

7.11 系. $X \in \mathcal{B}$, $\mu(X) > 0$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ とする。$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ の線形構造および semi-norm$\|\cdot\|_p$ は $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ に Banach 空間の構造を導く。

証明. 補題 7.8(i), (ii) と定理 7.10 □

8　有限加法的測度と誘導外測度

区間の長さを有限加法的測度としてとらえて議論を行う。外面積の考えを拡張して外測度を定式化しさらにそれの持つ性質を公理化して測度の構成へとつなげる。

約束

互いに共通部を持たない集合からなる族を**非交差族**(disjoint family) という。集合の族 $\mathcal{C}$ が指定されたとき $\mathcal{C}$ に属する集合を $\mathcal{C}$-**集合**とよぶ。

8.1 定義. A を空でない集合とする。A の**分割**(partition) とは空でない集合からなる非交差族 Δ であって $\bigcup_{J\in\Delta} J = A$ を満たすものをいう。特に集合の族 $\mathcal{C}$ が指定されている場合 $\mathcal{C}$-集合から構成されているものを $\mathcal{C}$-**分割**という。

8.2 定義. 集合族 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{C}$ は prefield をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$. $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.
(ii) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$, $A \neq B \Rightarrow A \setminus B$ の有限な $\mathcal{C}$-分割が存在する。

8.3 例. 左半開区間の全体に空集合 $\emptyset$ を付加した集合族は prefield である。

前提

以下 $\mathcal{C}$ を prefield とする。

8.4 補題. Δ を空でない $\mathcal{C}$-集合からなる有限な非交差族とし $A \in \mathcal{C}$ とする。
(i) $\bigcup_{J\in\Delta} J \subset A$, $\bigcup_{J\in\Delta} J \neq A$ なら $A \setminus (\bigcup_{J\in\Delta} J)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割が存在する。
(ii) $\bigcup_{J\in\Delta} J \cup A$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ であって $\Delta \subset \Lambda$ を満たすものが存在する。

証明. (i) 数学的帰納法を使う。まず Δ がひとつの集合 B からできているときを考える。仮定より $B \in \mathcal{C}$ である。従って補題 8.3(ii) により $A \setminus B$ の有限な $\mathcal{C}$-分割が存在する。すなわち $\sharp\Delta = 1$ のとき (i) は成り立つ。

$k \in \mathbb{N}$ かつ $\sharp\Delta \leq k$ のとき (i) が成り立つと仮定する。

そこで $\sharp\Delta = k+1$ とし、族 Δ からひとつ集合 B を取り去る。すると $\sharp(\Delta \setminus \{B\}) = k$ なので $A \setminus (\bigcup_{J\in\Delta : J\neq B} J)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Φ が存在する。B に含まれるか否かで分類する。

$$\{I \in \Phi : I \cap B = I\},\ \Phi_0 := \{I \in \Phi : I \cap B \neq I\}.$$

各 $I \in \Phi_0$ に対して $I \cap B \in \mathcal{C}$, $I \cap B \subset I$, $I \cap B \neq I$ なので補題 8.3(ii) により $I \setminus (I \cap B)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 $\Lambda(I)$ が存在する。これらを集めたもの $\Lambda := \bigcup_{I\in\Phi_0} \Lambda(I)$ が求める有限な $\mathcal{C}$-分割である。

(ii) $A \subset \bigcup_{J\in\Delta} J$ なら Δ 自身が求める有限な $\mathcal{C}$-分割であり、$A \neq \emptyset$ かつ $J \cap A = \emptyset\ \forall J \in \Delta$ なら $\Lambda := \Delta \cup \{A\}$ が求めるものである。そうでない場合は $\Delta_0 := \{J \in \Delta : J \cap A \neq \emptyset\}$ とおき (i) を $\{J \cap A ; J \in \Delta_0\}$ と A の組に適用することができる。従って

$A \setminus \bigcup_{J\in\Delta_0} (J \cap A)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ_0 が存在する。

これと既存の非交差族 Δ をあわせたもの $\Lambda := \Lambda_0 \cup \Delta$ が求める有限な $\mathcal{C}$-分割である。 □

8.5 系. $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ とする。$\bigcup_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ なら $\bigcup_{i=1}^n C_i$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Δ であって $\Delta = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Delta : J \subset C_i\}$ を満たすものが存在する。

証明. $n = 1$ のときは C_1 のみからなる族 $\{C_1\}$ が求めるものである。あとは補題 8.4(ii) を随時適用して n に関しての帰納法により証明できる。 □

いちいち断るのも煩わしいので、これから先は次のように理解しよう。

約束

A が空集合である場合その分割とは空な集合族のこととする。

次に面積などの持つ性質を公理化する。

8.6 定義. $\mathcal{C}$ を集合の族、m を関数 $\mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。それが次の条件を満たすとき、$(\mathcal{C}, m)$ は**有限加法的測度**(premeasure) であるという。

(i) $\mathcal{C}$ は prefield である。
(ii) $m(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{C}$, $m(\emptyset) = 0$.
(iii) $A \in \mathcal{C}$ とその有限な $\mathcal{C}$-分割 Δ に対して $m(A) = \sum_{J \in \Delta} m(J)$.

性質 (iii) を**有限加法性**(finite additivity) という。(iii) が任意の可算無限な $\mathcal{C}$-分割についても成り立つとき m は σ-**加法的**(σ-additive) であるという。

前提

以下 $(\mathcal{C}, m)$ を有限加法的測度とする。

8.7 補題. $A_1, \ldots, A_n$ および $B_1, \ldots, B_l$ はそれぞれ $\mathcal{C}$ 集合からなる非交差族であるとする。このとき $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^l B_i$ であるなら $\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^l m(B_i)$ が成り立つ。

証明. $m(\emptyset) = 0$ であるから $A_i \neq \emptyset \ \forall i$ かつ $B_i \neq \emptyset \ \forall i$ と仮定しても差し支えない。そこで

$$\Delta := \{A_i \cap B_j \,; i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, l \text{ ただし } A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$$

という集合族を導入する。各 $J \in \Delta$ は $A_1, \ldots, A_n$ のどれかに含まれ、しかもそのような番号はただ一つである。よって

$$\sum_{J \in \Delta} m(J) = \sum_{i=1}^n \sum_{J \in \Delta : J \subset A_i} m(J)$$

ここで $\{J \in \Delta : J \subset A_i\}$ は A_i の有限な $\mathcal{C}$-分割であるから m の有限加法性により

$$\sum_{J \in \Delta : J \subset A_i} m(J) = m(A_i)$$

が各 i に対して成り立つ。従って

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{J \in \Delta} m(J) = \sum_{i=1}^l m(B_i)$$

である。2 番目の等号は同様の推論が $B_1, \ldots, B_l$ についても成り立つことによる。 □

8.8 補題. Δ を空でない $\mathcal{C}$-集合からなる有限な非交差族、$C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ とする。
(i) $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ なら $m(B) \leq m(A)$ が成り立つ。
(ii) $A \in \mathcal{C}$, $\bigcup_{J\in\Delta} J \subset A$ なら $\sum_{J\in\Delta} m(J) \leq m(A)$ が成り立つ。
(iii) $B \in \mathcal{C}$, $B \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ なら $m(B) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$ が成り立つ。
(iv) $\bigcup_{J\in\Delta} J \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$ なら $\sum_{J\in\Delta} m(J) \leq \sum_{i=1}^n m(C_i)$ が成り立つ。

証明. (i) & (ii) 補題 8.4(i) によれば $A \setminus (\bigcup_{J\in\Delta} J)$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ が存在する。従って

$$\sum_{J\in\Delta} m(J) \leq \sum_{J\in\Delta} m(J) + \sum_{I\in\Lambda} m(I) = m(A)$$

が m の非負性と有限加法性により導かれる。特に $\Delta = \{B\}$ の場合が (i) である。

(iii) 系 8.5 によれば $\bigcup_{i=1}^n C_i$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Λ であって次を満たすものが存在する。

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \{J \in \Lambda : J \subset C_i\}$$

$\{J \in \Lambda : J \cap B \neq \emptyset\}$ は B の有限 $\mathcal{C}$ 分割であるから m の有限加法性により

$$m(B) = \sum_{J\in\Lambda: J\cap B\neq\emptyset} m(J\cap B) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{J\in\Lambda: J\cap B\neq\emptyset, J\subset C_i} m(J\cap B)$$

（ダブルカウント分だけ右辺が大きい）各 i に対して (ii) を使うと

$$\sum_{J\in\Lambda: J\cap B\neq\emptyset, J\subset C_i} m(J\cap B) \leq m(C_i)$$

故に求める不等式が得られる。

(iv) $J \in \Delta$ とする。$J \cap C_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$ は J の有限な $\mathcal{C}$-被覆であるから (iii) により

$$m(J) \leq \sum_{i=1}^n m(J \cap C_i).$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ とする。$J \cap C_i$ $J \in \Delta$ は $\mathcal{C}$-集合からなる有限な非交差族であるから (ii) により

$$\sum_{J\in\Delta} m(J\cap C_i) = \sum_{J\in\Delta: J\cap C_i\neq\emptyset} m(J\cap C_i) \leq m(C_i).$$

従って 2 重和の順序交換 $\sum_{J\in\Delta}\sum_{i=1}^n \cdots = \sum_{i=1}^n \sum_{J\in\Delta} \ldots$ により結論を得る。 $\square$

8.9 定義. 集合族 $\mathcal{U}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{U}$ は σ-universe をなすという。

$$\emptyset \in \mathcal{U}.\ A \in \mathcal{U}, B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{U}.\ A_n \in \mathcal{U}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{U}.$$

空でない集合族 $\mathcal{C}$ に対して次を $\mathcal{C}$ によって生成される σ-universe という。

$$\sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) := \bigcup_{C\in\mathrm{Map}(\mathbb{N},\mathcal{C})} \mathrm{Sbset}(\bigcup_{n=1}^\infty C(n)).$$

空な集合族によって生成される σ-universe は $\{\emptyset\}$ と約束する。

8.10 定義. 次を**有限加法的測度** m **が誘導する外測度**(outer measure) という。

$$\gamma(m;\cdot) : \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}, A \mapsto \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n)\,;\, C_n \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big\}.$$

関数 $\gamma(m;\cdot)$ の性質を調べる。

8.11 定義. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ を満たす $\mathcal{C}$-集合列 C_n を集合 A の**可算** $\mathcal{C}$**-被覆**(covering) と呼ぶ。

8.12 補題. (i) $\gamma(m;A) \geq 0\ \forall A$, $\gamma(m;\emptyset) = 0$.
(ii) $A \subset B \Rightarrow \gamma(m;A) \leq \gamma(m;B)$.
(iii) $\gamma(m;\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n)$.
(iv) A の有限 $\mathcal{C}$-被覆 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ に対して $\gamma(m;A) \leq \sum_{i=1}^{n} m(C_i)$.
(v) $A, B \in \mathcal{C}$ とする。$B \subset A$ なら $m(B) + \gamma(m;A \setminus B) \leq m(A)$ である。

証明. (i) m の非負値性により $\gamma(m;A) \geq 0$ である。次に $\emptyset \in \mathcal{C}$, $m(\emptyset) = 0$ であるから $C_n := \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ という可算 $\mathcal{C}$-被覆により $\gamma(m;\emptyset) = 0$ が実現されることが分かる。

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) = +\infty$ なら不等式は自明に成立するので、$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) < +\infty$ の場合を考察する。$\varepsilon > 0$ とする。各 $n \in \mathbb{N}$ について、$\gamma(m;A_n) < +\infty$ なので A_n の可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_{nk} $k \in \mathbb{N}$ であって

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \gamma(m;A_n) + \varepsilon/2^n$$

を満たすものが存在する。さて $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合であり、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{nk},\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ。集合列 C_{nk} は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆であるから次の不等式が導かれた。

$$\gamma(m;\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m;A_n) + \varepsilon.$$

この段階では $\varepsilon > 0$ はまったく任意なので結論を得る。

(iv) $i > n$ に対して $C_i := \emptyset$ とおいて A の可算無限 $\mathcal{C}$-被覆に延長できる。

(v) $A \neq B$ として差し支えない。このとき $A \setminus B$ の有限な $\mathcal{C}$-分割 Δ が存在する。従って

$$m(B) + \gamma(m;A \setminus B) \leq m(B) + \sum_{I \in \Delta} m(I) = m(A)$$

が (iv) と m の有限加法性により導かれる。 □

8.13 補題. $\mathcal{C}$-集合の列 C_n $n \in \mathbb{N}$ に対して集合族の列 Δ_n $n \in \mathbb{N}$ であって

$$\Delta_n \text{ は } \bigcup_{k=1}^{n} C_k \text{ の有限 } \mathcal{C}\text{-分割、} \Delta_n \subset \Delta_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

を満たすものが存在する。

証明. 補題 8.4(ii) を考慮に入れて帰納法を適用すればよい。 $\square$

8.14 系. $\gamma(m;A) = \inf\left\{\sum_{J\in\Delta} m(J); \Delta \text{ 非交差な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆}\right\} \ \forall A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$.

証明. $C_n\ n \in \mathbb{N}$ を集合 A の可算 $\mathcal{C}$-被覆とする。それに対し集合族の列 $\Delta_n\ n \in \mathbb{N}$ を補題 8.13 で述べられたものとする。このとき補題 8.8(iv) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J\in\Delta_n} m(J) \le \sum_{k=1}^{n} m(C_k)$$

である。さて $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は非交差な A の可算 $\mathcal{C}$-被覆である。さらに次が成り立つ。

$$\sum_{J\in\Delta} m(J) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{J\in\Delta_n} m(J) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} m(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k).$$

任意の可算 $\mathcal{C}$-被覆に対して上のような非交差な可算 $\mathcal{C}$-被覆を選ぶことができるので

$$\inf\left\{\sum_{J\in\Delta} m(J); \Delta \text{ 非交差な } A \text{ の可算 } \mathcal{C}\text{-被覆}\right\} \le \gamma(m;A).$$

逆向きの不等号は自明。 $\square$

9 Carathéodory の外測度と可測集合

この節では補題 8.12 で述べられた有限加法的測度が誘導する外測度の性質 (i), (ii), (iii) を公理化して議論し、それによる測度の構成方法を紹介する。これは単なる一般化ではない。必ずしも有限加法的測度に由来しない外測度も応用上重要だからである。

9.1 定義. σ-universe $\mathcal{U}$ を定義域にもつ関数 $\theta : \mathcal{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき、θ は *Carathéodory* **外測度**であるという。

(i) $\theta(A) \ge 0\ \forall A$, $\theta(\emptyset) = 0$. **非負性**(non-negativity)
(ii) $A \subset B \Rightarrow \theta(A) \le \theta(B)$. **単調性**(monotonicity)
(iii) $\theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n)$. **可算劣加法性**(countable subadditivity)

$A \in \mathcal{U}$ が *Carathéodory* **外測度** θ **に関して可測**(measurable)、略して θ 可測、であるとは

$$\theta(B) = \theta(B \cap A) + \theta(B \setminus A)\ \forall B \in \mathcal{U}$$

が成り立つことをいう。

前提と記号

$(\mathcal{U}, \theta)$ を Carathéodory 外測度とし θ **可測な** $\mathcal{U}$ **集合全体の族**を $\mathrm{Mble}(\theta)$ とおく。

9.2 補題. $A \in \mathrm{Mble}(\theta)$, $B_1 \subset A$, $B_2 \in \mathcal{U}$, $B_2 \cap A = \emptyset \Rightarrow \theta(B_1 \cup B_2) = \theta(B_1) + \theta(B_2)$.

証明. $(B_1 \cup B_2) \cap A = B_1$, $(B_1 \cup B_2) \setminus A = B_2$ を使う。 $\square$

9.3 補題. $\mathcal{M}$ を集合の族とする。次が成り立つなら $\mathcal{M}$ は quasi σ-field である。

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$. (ii) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$. (iii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.
(iv) $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

9.4 補題. $\mathrm{Mble}(\theta)$ は quasi σ-field であり、θ は $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上で σ-加法的である。

証明. $\emptyset \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。実際 $B \cap \emptyset = \emptyset$, $B \setminus \emptyset = B$, $\theta(\emptyset) = 0$ であるから

$$\theta(B \cap \emptyset) + \theta(B \setminus \emptyset) = \theta(\emptyset) + \theta(B) = \theta(B)\ \forall B \in \mathcal{U}.$$

$A_1, A_2 \in \mathrm{Mble}(\theta)$, $A_1 \subset A_2$ とする。補題 9.2 を適用するために次の関係に着目する。

$$B \setminus (A_2 \setminus A_1) = (B \cap A_1) \cup (B \setminus A_2), \{B \cap (A_2 \setminus A_1)\} \cup (B \cap A_1) = B \cap A_2.$$

まず A_2 の θ-可測性を適用し次に A_1 の θ-可測性、再び A_2 の θ-可測性を使うと

$$\begin{aligned}&\theta(B \cap (A_2 \setminus A_1)) + \theta(B \setminus (A_2 \setminus A_1)) = \theta(B \cap (A_2 \setminus A_1)) + \theta(B \cap A_1) + \theta(B \setminus A_2) \\ &= \theta(B \cap A_2) + \theta(B \setminus A_2) = \theta(B)\ \forall B \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

従って $A_2 \setminus A_1 \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。

$A, A' \in \mathrm{Mble}(\theta)$ とする。補題 9.2 を適用するために次の関係に着目する。

$$B \cap (A \cup A') = (B \cap A) \cup \{(B \setminus A) \cap A'\}, \{(B \setminus A) \cap A'\} \cup \{B \setminus (A \cup A')\} = B \setminus A.$$

まず A の θ-可測性を適用し次に A' の θ-可測性、再び A の θ-可測性を使うと

$$\begin{aligned}&\theta(B \cap (A \cup A')) + \theta(B \setminus (A \cup A')) = \theta(B \cap A) + \theta((B \setminus A) \cap A') + \theta(B \setminus (A \cup A')) \\ &= \theta(B \cap A) + \theta(B \setminus A) = \theta(B) \quad \forall B \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

従って $A \cup A' \in \mathrm{Mble}(\theta)$ である。

$A_n \in \mathrm{Mble}(\theta)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m$ とする。A_{n+1} の θ-可測性に着目して補題 9.2 を使うと次が得られる。$B \in \mathcal{U}$ は任意でよい。

$$\theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big)) = \theta(B \cap A_{n+1}) + \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big))\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ついでながら $A_n \cap A_m = \emptyset$ でなくても $A_n \cap A_m \cap B = \emptyset\ n \neq m$ が満たされるだけで上の等式は成立することに注意しておく。従って帰納法を適用し、その後 θ の単調性を使うと

$$\sum_{k=1}^{n} \theta(B \cap A_k) = \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) \leq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big))\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

各項は非負値なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta(B \cap A_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)) \leq \theta(B \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)).$$

他方、θ は可算劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立している。よって

$$(\star) \qquad \theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)) = \sum_{k=1}^{\infty}\theta(B\cap A_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)) \ \forall B\in\mathcal{U}.$$

さしあたりは必要ないが、前にもふれたことから $A_n\cap A_m=\emptyset$ でなくても $A_n\cap A_m\cap B=\emptyset$ $n\neq m$ が満たされるだけで上の等式は成立し、これが後で述べる系を導く。さてすでに証明されたことにより $\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathrm{Mble}(\theta)$ である。従って各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\theta(B) = \theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)) + \theta(B\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)) \geq \theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)) + \theta(B\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)).$$

ここで不等号は θ の単調性による。$(\star)$ をつかって

$$\theta(B) \geq \theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)) + \theta(B\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)) \ \forall B\in\mathcal{U}.$$

θ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立する。したがって

$$\theta(B) = \theta(B\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)) + \theta(B\setminus\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)) \ \forall B\in\mathcal{U}$$

であるから $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathrm{Mble}(\theta)$ が導かれた。

以上より集合族 $\mathrm{Mble}(\theta)$ は補題 9.3 の前提条件を満たすので quasi σ-field である。また $(\star)$ において $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ の場合が θ の $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上における σ-加法性にほかならない。 □

補題 9.4 の結論を言い換えてみよう。

9.5 定理. 外測度 θ の $\mathrm{Mble}(\theta)$ 上への制限は測度である。

記号

quasi σ-field $\mathcal{B}$ と集合 X に対して $\mathcal{B}|_X := \{A\cap X; A\in\mathcal{B}\}$ と書く。

9.6 補題. quasi σ-field $\mathcal{B}$ と集合 X に対して $\mathcal{B}|_X$ は quasi σ-field である。$X\in\mathcal{B}|_X$ であるための必要十分条件は $X\subset A$ なる $A\in\mathcal{B}$ が存在することである。

証明. 素直に条件をチェックすればよい。まず $\emptyset=\emptyset\cap X\in\mathcal{B}|_X$ である。次に $A,B\in\mathcal{B}$ かつ $A\cap X\subset B\cap X$ とする。補題 1.3(i) より $B\setminus A$ であるから

$$(B\cap X)\setminus(A\cap X) = (B\setminus A)\cap X\in\mathcal{B}|_X$$

また $A_n\in\mathcal{B}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ とすると $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap X) = (\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap X\in\mathcal{B}|_X$ である。 □

9.7 系. 集合 X に対して外測度 θ の $\mathrm{Mble}(\theta)|_X$ 上への制限は測度である。

証明. 補題 9.4 の証明中の $(\star)$ は $A_n\cap A_m\cap B=\emptyset$ $n\neq m$ が満たされるだけで成立する。これは θ の $\mathrm{Mble}(\theta)|_X$ 上への制限が σ-加法的であることを意味する。 □

9.8 定義. $A \in \mathcal{U}$ が θ **零集合**(θ-null set) であるとは $\theta(A) = 0$ であることをいう。

記号

θ 零集合全体の族を $\mathrm{Null}(\theta)$ と書く。

9.9 定理. (i) $\emptyset \in \mathrm{Null}(\theta)$ かつ $\mathrm{Null}(\theta) \subset \mathrm{Mble}(\theta)$ である。
(ii) $A_n \in \mathrm{Null}(\theta)\ \forall n \in \mathbb{N}$ かつ $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow B \in \mathrm{Null}(\theta)$

証明. (i) $\emptyset \in \mathrm{Null}(\theta)$ は $\theta(\emptyset) = 0$ より明らか。$A \in \mathrm{Null}(\theta)$, $B \in \mathcal{U}$ とする。$B \cap A \subset A$, $B \setminus A \subset B$, $\theta(A) = 0$ であるから θ の劣加法性と単調性により

$$\theta(B) \leq \theta(B \cap A) + \theta(B \setminus A) \leq \theta(A) + \theta(B) = \theta(B)$$

$B \in \mathcal{U}$ は任意であるからこれは $A \in \mathrm{Mble}(\theta)$ を意味する。
(ii) $A_n \in \mathrm{Null}(\theta)\ \forall n \in \mathbb{N}$ かつ $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする。θ の単調性と可算劣加法性により

$$0 \leq \theta(B) \leq \theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(A_n) = 0$$

であるから $B \in \mathrm{Null}(\theta)$ が従う。 □

ここで有限加法的測度が誘導する外測度についての議論に戻る。

前提

以下 $(\mathcal{C}, m)$ を有限加法的測度とする。

記号

$\mathrm{Mble}(\gamma(m;\cdot))$ を単に $\mathrm{Mble}(m)$ と書き $\gamma(m;\cdot)$ の $\mathrm{Mble}(m)$ への制限を $m^\star$ と書く。また $\mathrm{Null}(\gamma(m;\cdot))$ を単に $\mathrm{Null}(m)$ と書くことにする。

このとき $(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ は完備な測度である。これと $(\mathcal{C}, m)$ との関係を調べる。

9.10 定理. すべての $\mathcal{C}$-集合は $\gamma(m;\cdot)$-可測である。すなわち $\mathcal{C} \subset \mathrm{Mble}(m)$ である。

証明. $A \in \mathcal{C}$ とする。$B \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ に対しその可算 $\mathcal{C}$-被覆の一つを $C_n\ n \in \mathbb{N}$ とする。$C_n \cap A\ n \in \mathbb{N}$ は集合 $B \cap A$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆であるから

$$\gamma(m; B \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n \cap A).$$

他方、外測度 $\gamma(m;\cdot)$ の単調性と可算劣加法性により

$$\gamma(m; B \setminus A) \leq \gamma(m; \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n \setminus A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(m; C_n \setminus A).$$

さて $C_n \setminus A = C_n \setminus (C_n \cap A)$ であるから補題 8.12(v) によると

$$m(C_n \cap A) + \gamma(m; C_n \setminus A) \le m(C_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ。従って以上を組み合わせると

$$\gamma(m; B \cap A) + \gamma(m; B \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n).$$

これがあらゆる B の可算 $\mathcal{C}$-被覆について満たされる。よって

$$\gamma(m; B \cap A) + \gamma(m; B \setminus A) \le \gamma(m; B)\ \forall B \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}).$$

$\gamma(m; \cdot)$ は劣加法性を持つので逆向きの不等号も成立し $A \in \mathrm{Mble}(m)$ が導かれた。 □

9.11 定理. 以下はすべて同値である。
(i) $\gamma(m; A) = m(A)\ \forall A \in \mathcal{C}$.
(ii) m は σ-加法的
(iii) $A \in \mathcal{C}$ とその可算 $\mathcal{C}$-被覆 Δ で非交差族であるものに対して $m(A) \le \sum_{J \in \Delta} m(J)$.

証明. 定理 9.10 により $\mathcal{C} \subset \mathrm{Mble}(m)$ である。従って定理 9.5 により

$\mathcal{C}$-集合からなる可算非交差族 Δ に対して $\gamma(m; \bigcup_{J \in \Delta} J) = \sum_{J \in \Delta} \gamma(m; J)$.

これは Δ が $\mathcal{C}$-集合の可算 $\mathcal{C}$-分割になっている場合も含む。よって論理図式 (i) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ。次に A および Δ を (iii) の前提にあるようなものとする。$\{J \cap A\,; J \in \Delta, J \cap A \ne \emptyset\}$ は $A \in \mathcal{C}$ の可算 $\mathcal{C}$-分割であるから、m が σ-加法的なら

$$m(A) = \sum_{J \in \Delta : J \cap A \ne \emptyset} m(J \cap A) = \sum_{J \in \Delta} m(J \cap A) \le \sum_{J \in \Delta} m(J).$$

ここで不等号は補題 8.8(i) による。よって論理図式 (ii) $\Rightarrow$ (iii) が成り立つ。系 8.14 によれば (iii) が成り立つなら $m(A) \le \gamma(m; A)\ \forall A \in \mathcal{C}$. 他方、補題 8.12(iv) によれば逆向きの不等号も成り立っている。よって残りの論理図式 (iii) $\Rightarrow$ (i) が導かれた。 □

9.12 定義. 有限加法的測度 $(\mathcal{C}, m)$ に対して測度 $(\mathcal{B}, \mu)$ が存在して $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mu(A) = m(A)$ $\forall A \in \mathcal{C}$ が成り立つとき $(\mathcal{B}, \mu)$ は**有限加法的測度** $(\mathcal{C}, m)$ **の測度への拡張**という。

m が σ-加法的なら定理 9.10 と定理 9.11 により測度 $(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ は $(\mathcal{C}, m)$ の拡張である。逆に測度に拡張可能な有限加法的測度は σ-加法的である。

9.13 定理. 有限加法的測度が測度に拡張されるための必要十分条件はそれが σ-加法的なことである。*Hopf* **の拡張定理**

9.14 補題. m は σ-加法的であるとする。$A \in \mathrm{Mble}(m)$ かつ $m^\star(A) < +\infty$ なら、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して有限個の $\mathcal{C}$ 集合 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ と $D \in \mathrm{Mble}(m)$ が存在して

$$A \cup \bigcup_{n=1}^{k} C_n \subset D, m^\star(D) < +\infty \text{ かつ } \int |1_{A:D} - \sum_{n=1}^{k} 1_{C_n:D}|\, m^\star < \varepsilon.$$

証明. Mble(m) 可測集合 A に対してその外測度をもって $m^\star(A)$ を決めるというのが定義であった。仮定より外測度 $m^\star(A)$ は有限値であるから、$\mathcal{C}$ 集合列 C_n が存在して次を満たす。

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < m^\star(A) + \varepsilon/2.$$

定理 9.10 と定理 9.11 より $C_n \in \mathrm{Mble}(m)$ かつ $m(C_n) = m^\star(C_n)$ である。ここで $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ とおく。補題 5.2 を考慮して定義関数を使って表現すると

$$1_{A:D}(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{D:C_n}(x)\, \forall x \in D, \ \int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D}\, m^\star = \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{C_n:D}\, m^\star < \int 1_{A:D}\, m^\star + \frac{\varepsilon}{2}.$$

関数 $1_{A:D}, \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D}$ はともに $m^\star$ 可積分なので定理 4.6 を適用して

$$\int \Big| 1_{A:D} - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D} \Big| m^\star = \int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D} - 1_{A:D} \Big) m^\star = \int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D}\, m^\star - \int 1_{A:D}\, m^\star < \frac{\varepsilon}{2}.$$

他方 $\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < +\infty$ であるから、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n:D}\, m^\star = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int 1_{C_n:D}\, m^\star = \sum_{n=k+1}^{\infty} m(C_n) < \varepsilon/2.$$

定理 4.6 を適用して以上を組み合わせると

$$\int \Big| 1_{A:D} - \sum_{n=1}^{k} 1_{C_n:D} \Big| m^\star \le \int \Big| 1_{A:D} - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{C_n:D} \Big| m^\star + \int \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_{C_n:D}\, m^\star < \varepsilon.$$

集合 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ が求めるものである。 □

9.15 定理. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ 可積分関数とする。任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して有限個の $\mathcal{C}$ 集合 $C_1, C_2, \ldots, C_k$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ と $D \in \mathrm{Mble}(m)$ が存在して

$$\mathrm{Dom}\, f \cup \bigcup_{n=1}^{k} C_n \subset D, \int_{D \setminus \mathrm{Dom}\, f} |\sum_{n=1}^{k} a_n 1_{C_n:D}|\, m^\star + \int |f - \sum_{n=1}^{k} a_n 1_{C_n:D}|_{\mathrm{Dom}\, f}|\, m^\star < \varepsilon.$$

証明. 補題 3.9 によれば、非負値 Mble(m) 単関数列 f_n が存在して

$$\mathrm{Dom}\, f_n = \mathrm{Dom}\, f, \ f_n \le f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \max\{f(x), 0\}\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

定理 3.10 を適用すると

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n\, m^\star = \int \max\{f, 0\}\, m^\star \le \int |f|\, m^\star < +\infty.$$

よってある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int \max\{f, 0\}\, m^\star < \int f_k\, m^\star + \varepsilon/4.$$

$h := f_k$ とおくとこれは $m^\star$ 可積分な Mble(m) 単関数で

$$0 \le h \le \max\{f, 0\},\ \int (\max\{f,0\} - h)\, m^\star = \int \max\{f,0\}\, m^\star - \int h\, m^\star < \varepsilon/4.$$

$z \in \operatorname{Image} h$ かつ $z > 0$ とする。補題 3.3(iii) により

$$zm^\star(h^{-1}\{z\}) \le \int h\, m^\star < +\infty.$$

従って $m^\star(h^{-1}\{z\}) < +\infty$ である。$\operatorname{Image} h$ の要素数は有限であるが、それを N とおく。補題 9.14 により有限個の $\mathcal{C}$ 集合 $C(z,1), C(z,2), \ldots, C(z,k(z))$ と $D(z) \in \mathrm{Mble}(m)$ が存在して

$$h^{-1}\{z\} \cup \bigcup_{n=1}^{k(z)} C(z,n) \subset D(z),\ \int |1_{h^{-1}\{z\}:D(z)} - \sum_{n=1}^{k(z)} 1_{C(z,n):D(z)}|\, m^\star < \frac{\varepsilon}{4Nz}.$$

ここで $D := \operatorname{Dom} f \cup \bigcup_{z \in \operatorname{Image} h : z>0} D(z)$ とおく。定理 4.6 を適用して

$$\begin{aligned}
&\int \Big| \sum_{z \in \operatorname{Image} h, z>0} z 1_{h^{-1}\{z\}:D} - \sum_{z \in \operatorname{Image} h, z>0} z \sum_{n=1}^{k(z)} 1_{C(z,n):D} \Big|\, m^\star \\
&\le \sum_{z \in \operatorname{Image} h, z>0} z \int |1_{h^{-1}\{z\}:D} - \sum_{n=1}^{k(z)} 1_{C(z,n):D}|\, m^\star < \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

記号の簡単のため $g := \sum_{z \in \operatorname{Image} h, z>0} z \sum_{n=1}^{k(z)} 1_{C(z,n):D}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int_{D \setminus \operatorname{Dom} f} |g|\, m^\star + \int |f - g|_{\operatorname{Dom} f}|\, m^\star \\
&\le \int (\max\{f,0\} - h)\, dv^\star + \int \Big| \sum_{z \in \operatorname{Image} h, z>0} z 1_{h^{-1}\{z\}:D} - g \Big|\, m^\star < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

関数 $-f$ に対しても以上の議論が適用できる。 □

10 拡張の一意性

この節では拡張の一意性について議論する。

前提

$(\mathcal{C}, m)$ を σ-加法的な有限加法的測度とする。

$(\mathrm{Mble}(m), m^\star)$ は測度で $(\mathcal{C}, m)$ を拡張する。さて $\mathcal{B}$ を quasi σ-field で $\mathcal{C}$ を含むもの、$(\mathcal{B}, \mu_1)$, $(\mathcal{B}, \mu_2)$ を測度で $(\mathcal{C}, m)$ を拡張するものとする。問題はいつ $\mu_1 = \mu_2$ がいえるかである。そのための条件は、$(\mathcal{C}, m)$ および $\mathcal{B}$ 両方に関わることになる。

10.1 定義. $(\mathcal{C}, m)$ が σ-**有限**(σ-finite) であるとは各 $A \in \mathcal{C}$ に対して可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_n $n \in \mathbb{N}$ で $m(C_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在することをいう。

$\sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ の定義からすぐ分かるように $(\mathcal{C}, m)$ が σ-有限なら各 $A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ に対して可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_n $n \in \mathbb{N}$ で $m(C_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在する。

10.2 補題. $(\mathcal{C}, m)$ が σ-有限なら任意の $\mathcal{C}$-集合列 C_n $n \in \mathbb{N}$ にたいして $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ の可算 $\mathcal{C}$-分割 Δ で $m(J) < \infty$ $\forall J \in \Delta$ をみたすものが存在する。

証明. $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ であるからその可算 $\mathcal{C}$-被覆 $\widetilde{C}_k$ $k \in \mathbb{N}$ で $m(\widetilde{C}_k) < +\infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在する。このとき $\bigcup_{n,k=1}^{\infty} C_n \cap \widetilde{C}_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, $m(C_n \cap \widetilde{C}_k) \leq m(\widetilde{C}_k) < +\infty$ であるから最初から $m(C_n) < +\infty$ であったとしても構わない。集合族の列 Δ_n $n \in \mathbb{N}$ を補題 8.13 で述べられたものとする。補題 8.8(iv) によれば、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{J \in \Delta_n} m(J) \leq \sum_{k=1}^{n} m(C_k) < +\infty.$$

従って $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ の可算 $\mathcal{C}$-分割 $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は $m(J) < \infty$ $\forall J \in \Delta$ をみたす。 □

10.3 補題. $X \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$ に対して以下は同値である。

(i) $\gamma(m; \cdot)$ の $\mathrm{Mble}(m)|_X$ 上への制限は σ 有限。
(ii) X の可算 $\sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$-被覆 A_n で $\gamma(m; A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ を満たすものが存在。
(iii) X の可算 $\mathcal{C}$-被覆 C_n で $m(C_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ をみたすものが存在。

証明. まず $\sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ の定義からすぐ分かるように X の可算 $\mathcal{C}$-被覆が存在する。定理 9.10 より $\mathcal{C} \subset \mathrm{Mble}(m)$ であるから $B \in \mathrm{Mble}(m)$ であって $X \subset B$ を満たすものが存在する。従って $X \in \mathrm{Mble}(m)|_X$ であることに注意しておく。

さて $\gamma(m; \cdot)$ の $\mathrm{Mble}(m)|_X$ 上への制限は σ 有限であるとする。このとき X の可算 $\mathrm{Mble}(m)$ 被覆 B_n で $\gamma(m; B_n \cap X) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ を満たすものが存在する。明らかに集合列 $B_n \cap X$ は X の可算 $\sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$-被覆である。以上により (i) $\Rightarrow$ (ii) が示せた。

次に A_n を X の可算 $\sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$-被覆で $\gamma(m; A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ を満たすものとする。$\gamma(m; \cdot)$ の定義からすぐ分かるように各 $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n の可算 $\mathcal{C}$-被覆 $C_k^{(n)}$ であって

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(C_k^{(n)}) \leq \gamma(m; A_n) + 1 < +\infty$$

を満たすものが存在する。明らかに集合列 $C_k^{(n)}$ $k, n \in \mathbb{N}$ は X の可算 $\mathcal{C}$-被覆である。以上により (ii) $\Rightarrow$ (iii) が示せた。

C_n を X の可算 $\mathcal{C}$-被覆で $m(C_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ を満たすものとする。定理 9.10 と定理 9.11 により $\mathcal{C} \subset \mathrm{Mble}(m)$, $\gamma(m; \cdot)|_{\mathcal{C}} = m$ であるから $C_n \cap X \in \mathrm{Mble}(m)|_X$ であって

$$\gamma(m; C_n \cap X) \leq \gamma(m; C_n) = m(C_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$$

である。以上により (iii) $\Rightarrow$ (i) が示せた。 □

10.4 定義. $X \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$ が m に関して σ-有限であるとは $\gamma(m; \cdot)$ の $\mathrm{Mble}(m)|_X$ 上への制限が σ 有限であることをいう。

10.5 補題. (i) $(\mathcal{C}, m)$ が σ-有限であれば任意の $X \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$ は m に関して σ-有限である。また $X \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$ であって $\gamma(m; X) < +\infty$ を満たすものは m に関して σ-有限である。
(ii) $\{A \in \mathrm{Mble}(m) : m$ に関して σ-有限 $\}$ は quasi σ-field である。
(iii) f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathrm{Mble}(m)$ 可測関数とする。このとき $\int |f|\ m^\star < +\infty$ であるなら $\{x : f(x) \neq 0\}$ は m に関して σ-有限である。
(iv) $(\mathcal{B}, \mu)$ を測度であって $(\mathcal{C}, m)$ を拡張する、即ち $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ かつ $\mu(A) = m(A)\ \forall A \in \mathcal{C}$ を満たすものとする。このとき $\mu(A) \leq \gamma(m; A)\ \forall A \in \mathcal{B} \cap \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ でありさらに次が成り立つ。

$$\mu(A) = m^\star(A)\ \forall A \in \mathcal{B} \cap \{A \in \mathrm{Mble}(m) : m \text{ に関して } \sigma\text{-有限 }\}$$

証明. (iii) $n \in \mathbb{N}$ とする。補題 3.3(iii) を適用して

$$m^\star(\{x : |f(x)| > 1/n\}) \leq n \int |f|\ m^\star < +\infty$$

従って (i), (ii) により $\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x : |f(x)| > 1/n\}$ も m に関して σ-有限である。

(iv) $C_n\ n \in \mathbb{N}$ を $A \in \mathcal{B} \cap \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ の可算 $\mathcal{C}$-被覆とする。このとき $C_n \in \mathcal{B}$, $\mu(C_n) = m(C_n)$ である。従って補題 6.11 により次が成り立つので $\mu(A) \leq \gamma(m; A)$ である。

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(C_n) = \sum_{n=1}^\infty m(C_n).$$

補題 10.2 によれば m に関して σ-有限であるような $A \in \mathcal{B} \cap \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C})$ に対しその可算 $\mathcal{C}$-被覆 Δ で非交差かつ $m(J) < +\infty\ \forall J \in \Delta$ を満たすものが存在する。$J \in \Delta$ としよう。このとき $J \in \mathcal{B}$, $\mu(J) = m(J) < +\infty$ であり、また $\mu(J \setminus A) \leq \gamma(m; J \setminus A)$ であるから

$$\mu(A \cap J) = \mu(J) - \mu(J \setminus A) \geq m(J) - \gamma(m; J \setminus A).$$

さらに $A \in \mathrm{Mble}(m)$ も仮定する。定理 9.10 と定理 9.11 により $J \in \mathrm{Mble}(m)$, $m^\star(J) = m(J) < +\infty$ であるから

$$m(J) - \gamma(m; J \setminus A) = m^\star(J) - m^\star(J \setminus A) = m^\star(A \cap J).$$

以上と μ, $m^\star$ 双方の σ-加法性により

$$\mu(A) = \sum_{J \in \Delta} \mu(A \cap J) \geq \sum_{J \in \Delta} m^\star(A \cap J) = m^\star(A)\ \forall A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m).$$

さて $A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ に対しては $m^\star(A) = \gamma(m; A)$ であるから既に確認済みの不等式 $\mu(A) \leq \gamma(m; A)$ とあわせて結論を得る。 □

10.6 注意. 補題 10.5(iv) は $\mu(A) < +\infty$, $m^\star(A) = +\infty$ であるような $A \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ の存在を排除していない。

補題 10.5 ではふたつの quasi σ-field の共通部 $\mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ が現れた。実はそのようなものは quasi σ-field である。例えば有限加法的測度を複数扱うとなるとそれに応じて quasi σ-field も複数現れることになるので一般的な定式化を行う。

10.7 補題. quasi σ-field たち $\mathcal{B}_\alpha$ の共通部 $\bigcap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ も quasi σ-field である。

10.8 定理. $(\mathcal{B}, \mu)$ は $(\mathcal{C}, m)$ を拡張する測度であり f は $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m)$ 可測関数とする。このとき $\int |f|\ m^\star < +\infty$ であるなら $\int |f|\ \mu < +\infty$ かつ $\int f\ m^\star = \int f\ \mu$ が成り立つ。

証明. 補題 10.5(iii) によれば、$\{x : f(x) \neq 0\}$ は m に関して σ-有限である。よって

$$\int \max\{f, 0\}\ m^\star = \int_{\{f \neq 0\}} \max\{f, 0\}\ m^\star = \int_{\{f \neq 0\}} \max\{f, 0\}\ \mu = \int \max\{f, 0\}\ \mu$$

を補題 4.15(i) と補題 10.5(iv) の適用により導くことができる。 □

10.9 補題. 集合の族 $\mathcal{A}$ に対して次の条件を満たす集合族がただ一つ存在する。

(i) $\mathcal{B}$ は quasi σ-field かつ $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ である。
(ii) 条件 (i) を満たす任意の集合族 $\mathcal{B}'$ に対して $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ である。**最小性**

証明. 先ず $\mathcal{A}$ を内包する quasi σ-field は存在する。実際 $\sigma\mathfrak{U}(\mathcal{A})$ がそうである。

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{B};\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{A}) \text{ quasi } \sigma\text{-field }\}$$

は補題 10.7 により quasi σ-field である。また $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ である。ここで $\mathcal{B}'$ を $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'$ なる quasi σ-field とする。補題 10.7 より $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}'$ は quasi σ-field である。他方

$$\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}' \subset \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{A})$$

なので $\sigma(\mathcal{A})$ の定義より $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}'$ を得る。したがって $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}'$ である。 □

10.10 定義. 集合の族 $\mathcal{A}$ に対し系 10.9 で規定される quasi σ-field を記号 $\sigma(\mathcal{A})$ で表し、これを $\mathcal{A}$ **で生成される** *quasi σ-field* (quasi σ-field generated by $\mathcal{A}$) と呼ぶ。

次の定理は有限加法的測度の測度への**拡張の一意性**を述べるもので、考察の対象となる測度の性質を調べたり逆にそれを利用して測度を特定したりするのにきわめて有効である。

10.11 定理. σ-有限な $(\mathcal{C}, m)$ の $\sigma(\mathcal{C})$ への測度としての拡張は一意的である。すなわち測度 $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ が $(\mathcal{C}, m)$ を拡張するなら $\mu(A) = m^\star(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{C})$ が成り立つ。

証明. 定理 9.10 により $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Mble}(m)$ である。従って補題 10.5 より直ちに導かれる。 □

10.12 補題. $\sup\{r 1_{[r, +\infty)}(t)\,;\, r \in \mathbb{Q}_{>0}\} = \max\{t, 0\}\ \forall t \in \mathbb{R}.$

10.13 定理. $(\mathcal{C}, m)$ は σ-有限であるとする。
(i) $\mathrm{Mble}(m) = \{A \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C}) : \exists Z, B \in \sigma(\mathcal{C}) \text{ s.t. } Z \subset A \subset B, B \setminus Z \in \mathrm{Null}(m)\}.$
(ii) 任意の $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathrm{Mble}(m)$ 可測関数 f に対して $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\sigma(\mathcal{C})$ 可測関数 g, h が存在して

$$\mathrm{Dom}\, g = \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g, g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f, g = h\ m^\star\text{-a.e.}$$

証明. (i) 右辺の集合族を $\mathcal{R}$ とおく。$A \in \mathcal{R}$ とする。このとき $Z \subset A \subset B$, $B \setminus Z \in \mathrm{Null}(m)$ を満たす $Z, B \in \sigma(\mathcal{C})$ が存在する。$A \setminus Z \subset B \setminus Z$ なので、定理 9.9 により $A \setminus Z \in \mathrm{Mble}(m)$ である。従って $A = (A \setminus Z) \cup Z \in \mathrm{Mble}(m)$ を得る。一般に

$$(\star) \qquad \gamma(m; A) = \inf\{m^\star(B)\,; B \in \sigma(\mathcal{C}), A \subset B\} \ \forall A \in \sigma\mathcal{U}(\mathcal{C})$$

が成り立つことを示そう。$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Mble}(m)$ であるから単調性により

$$B \in \sigma(\mathcal{C}), A \subset B \Rightarrow \gamma(m; A) \leq \gamma(m; B) = m^\star(B)$$

次に A の可算 $\mathcal{C}$ 被覆 C_n に対して $B := \bigcup_{n=1}^\infty C_n \in \sigma(\mathcal{C})$, $A \subset B$ であり

$$m^\star(B) = m^\star(\bigcup_{n=1}^\infty C_n) \leq \sum_{n=1}^\infty m^\star(C_n) = \sum_{n=1}^\infty m(C_n)$$

以上により $(\star)$ が示せた。ここで $A \in \mathrm{Mble}(m)$ と仮定する。$(\star)$ を適用すると

$$B_n \in \sigma(\mathcal{C}), A \subset B_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} m^\star(B_n) = \gamma(m; A) = m^\star(A)$$

を満たす集合列 B_n が存在することがわかる。そこで $B := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ とおくと

$$B \in \sigma(\mathcal{C}), A \subset B, m^\star(B) = m^\star(A)$$

が成り立つ。更に $m^\star(A) < +\infty$ と仮定すると $m^\star(B \setminus A) = 0$ が導かれる。さて補題 10.2 によれば A の可算 $\mathcal{C}$-被覆 Δ で非交差かつ $m(J) < +\infty \ \forall J \in \Delta$ を満たすものが存在する。$J \in \Delta$ としよう。このとき $J \in \sigma(\mathcal{C})$ であり、また $m^\star(A \cap J) \leq m^\star(J) = m(J) < +\infty$ である。再び $(\star)$ を適用して $A \cap J$ に対して同様に議論すると

$$B(J) \in \sigma(\mathcal{C}), A \cap J \subset B(J), m^\star(B(J) \setminus (A \cap J)) = 0$$

を満たす集合 $B(J)$ が存在することがわかる。そこで $B := \bigcup_{J \in \Delta} (B(J) \cap J)$ とおくと

$$B \in \sigma(\mathcal{C}), A \subset B, m^\star(B \setminus A) = \sum_{J \in \Delta} m^\star((B(J) \cap J) \setminus (A \cap J)) = 0$$

が成り立つ。$(\star)$ を適用して $B \setminus A$ に対して同様に議論すると

$$N \in \sigma(\mathcal{C}), B \setminus A \subset N, m^\star(N) = m^\star(B \setminus A) = 0$$

を満たす集合 N が存在することがわかる。$Z = B \setminus N$ とおくとこれは $Z \in \sigma(\mathcal{C})$,, $Z \subset A$, $B \setminus Z = N$ を満たすので $A \in \mathcal{R}$ が示せた。

(ii) (i) より各 $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $Z(r), B(r) \in \sigma(\mathcal{C})$ であって次を満たすものが存在する。

$$Z(r) \subset \{x : f(x) \geq r\} \subset B(r), B(r) \setminus Z(r) \in \mathrm{Null}(m)$$

$D := \mathrm{Dom}\, f$ とおく。次で定義される $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 g_+, h_+ は $\sigma(\mathcal{C})$ 可測である。

$$g_+ := \sup\{r 1_{Z(r):D}\,; r \in \mathbb{Q}_{>0}\}, h_+ := \sup\{r 1_{B(r):D}\,; r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

$r1_{Z(r):D} \le r1_{\{f \ge r\}:D} \le r1_{B(r):D}$ が成り立つので補題 10.12 により

$$0 \le g_+(x) \le \max\{f(x), 0\} \le h_+(x)\ \forall x \in D.$$

さて $\{x : g_+(x) \ne h_+(x)\} \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}: r>0} \big(B(r) \setminus Z(r)\big)$ であるから定理 9.9(ii) を適用して

$$\{x : g_+(x) \ne h_+(x)\} \in \mathrm{Null}(m)$$

を得る。同様に $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\sigma(\mathcal{C})$ 可測関数 g_-, h_- であって次を満たすものが存在する。

$$g_-(x) \le \min\{f(x), 0\} \le h_-(x) \le 0\ \forall x \in D, \{x : g_-(x) \ne h_-(x)\} \in \mathrm{Null}(m)$$

求める関数の組 g, h は次のように定義すればよい。

$$g(x) := \begin{cases} g_+(x) & g_+(x) > 0 \\ g_-(x) & g_+(x) = 0 \end{cases} \quad h(x) := \begin{cases} h_-(x) & h_-(x) < 0 \\ h_+(x) & h_-(x) = 0 \end{cases}$$

これでうまくいくことを確かめるために次に着目する。

$$\begin{aligned} f(x) > 0, g_+(x) > 0 &\Rightarrow g(x) = g_+(x) \le \max\{f(x), 0\} = f(x) \\ f(x) > 0, g_+(x) = 0 &\Rightarrow g(x) = g_-(x) \le 0 < f(x) \\ f(x) \le 0\ (\Rightarrow g_+(x) = 0) &\Rightarrow g(x) = g_-(x) \le \min\{f(x), 0\} = f(x) \end{aligned}$$

従って $g(x) \le f(x)\ \forall x \in D$ であり、更に次が成り立つ。

$$\{f \ne g\} = \{f > 0, g_+ > 0, g_+ \ne \max\{f, 0\}\} \cup \{f > 0, g_+ = 0\} \cup \{f \le 0, g_- \ne \min\{f, 0\}\}$$

また $\{f > 0, g_+ = 0\} \subset \{g_+ \ne \max\{f, 0\}\}$ であるから

$$\{f \ne g\} \subset \{g_+ \ne \max\{f, 0\}\} \cup \{g_- \ne \min\{f, 0\}\}.$$

右辺は $\{g_+ \ne h_+\} \cup \{g_- \ne h_-\}$ の部分集合であるから $\{f \ne g\} \in \mathrm{Null}(m)$ が導かれる。同様にして $f(x) \le h(x)\ \forall x \in D$, $\{f \ne h\} \in \mathrm{Null}(m)$ であることが分かる。 □

11　測度の比較と単調族

11.1 定義. 集合の族 $\mathcal{F}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{F}$ は quasi field をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii) $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{F}$
(iii) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

quasi field $\mathcal{F}$ に対して $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{F}$ が成り立つ。

11.2 補題. $\mathcal{M}$ を集合の族とする。次が成り立つなら $\mathcal{M}$ は quasi field である。

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$. (ii) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$. (iii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$.
(iv) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.

証明. $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ とする。まず $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$, $B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$ であり、これらは互いに非交差である。よって $A \cup B = (A \cap B) \cup \{A \setminus (A \cap B)\} \cup \{B \setminus (A \cap B)\} \in \mathcal{M}$. □

11.3 定義. 集合族 $\mathcal{C}$ で条件 $A \cap B \in \mathcal{C}$ $\forall A \in \mathcal{C}$ $\forall B \in \mathcal{C}$ を満たすものを π-system と呼ぶ。

11.4 定義. 集合の族 $\mathcal{M}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{M}$ は additive system をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(ii) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.

明らかに任意の quasi field は additive system であり、prefield であり、π-system である。補題 10.7 でのべたように quasi σ-field たちの共通部は quasi σ-field である。これと同じことが additive system についてもいえる。

11.5 補題. (i) additive system たち $\mathcal{M}_\alpha$ に対し $\bigcap_\alpha \mathcal{M}_\alpha$ も additive system である。
(ii) 任意の集合 B, σ-universe $\mathcal{U}$ と additive system $\mathcal{M}$ に対して $\{A \in \mathcal{U} : A \cap B \in \mathcal{M}\}$ および $\{A \in \mathcal{U} : A \setminus B \in \mathcal{M}\}$ は additive system である。

証明. (ii) まず $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{M}$, $\emptyset \setminus B = \emptyset \in \mathcal{M}$ である。次に $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とする。$A_1 \cap B \in \mathcal{M}$, $A_2 \cap B \in \mathcal{M}$ なら $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$ より

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \in \mathcal{M}$$

である。$A_1 \setminus B \in \mathcal{M}$, $A_2 \setminus B \in \mathcal{M}$ の場合も同様である。 □

11.6 補題. (i) π-system $\mathcal{C}$ で生成される additive system $\mathcal{M}$ は π-system である。
(ii) prefield $\mathcal{C}$ で生成される additive system $\mathcal{M}$ は quasi field である。
(iii) prefield $\mathcal{C}$ で生成される quasi field $\mathcal{F}$ は次で与えられる。

$$\{\bigcup_{i=1}^{n} C_i ; C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ mutually disjoint}\}$$

証明. (i) 集合族 $\mathcal{C}$ は π システムであることと関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ により

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{C}.$$

次の集合族は $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_1$ を満たす。

$$\mathcal{M}_1 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{C}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{M}\}$$

$\mathcal{M}$ は additive system なので補題 11.5 によれば $\mathcal{M}_1$ は additive system である。したがって関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}$ の定義により $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ すなわち $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{C}$ を得る。これは次と同値である。

$$A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}.$$

A, B の役割を入れ替えてみよう。

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{M}.$$

よって次の集合族は $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2$ を満たす。

$$\mathcal{M}_2 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D} \ \forall B \in \mathcal{M}\}.$$

$\mathcal{M}_1$ に対するのと同じ論法を繰り返して $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{M}$ を得る。

(ii) $A, B \in \mathcal{C}$ かつ $A \subset B$ とする。$A = B$ なら明らかに $B \setminus A = \emptyset \in \mathcal{M}$ である。以後 $A \neq B$ として話を進める。$B \setminus A$ は有限 $\mathcal{C}$ 分割を持つ。それを $C_1, \ldots, C_n$ とすると $C_i \in \mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ であり互いに素なので $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{M}$ を得る。一般に $A, B \in \mathcal{C}$ なら $A \cap B \in \mathcal{C}$ なので $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{M}$ が導かれる。すなわち

$$\mathcal{C} \subset \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \setminus B \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{C}\}$$

よって (i) で行った論法を当てはめることにより次が分かる。

$$A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}.$$

A, B の役割を入れ替えて $A \in \mathcal{C} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{M}$ と書き換える。よって集合族

$$\mathcal{M}_3 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : B \setminus A \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{M}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{M}} \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : B \setminus A \in \mathcal{M}\}$$

は $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3$ を満たす。さて $B \in \mathcal{M}$ を任意に固定する。族 $\mathcal{C}$ は π-system であるから、(i) により $\mathcal{M}$ も π-system である。これを使うと

$$A_1, A_2 \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow B \setminus A_1, B \setminus A_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow B \setminus (A_1 \cup A_2) = (B \setminus A_1) \cap (B \setminus A_2) \in \mathcal{M}$$

従って $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}_3$ である。特に $\mathcal{M}_3$ は additive system となるので $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_3$ が導かれた。即ち $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$ である。以上で族 $\mathcal{M}$ に補題 11.2 を適用する手はずが整ったので $\mathcal{M}$ が quasi field であることが結論づけられた。

(iii) 命題で与えたのは $\mathcal{C}$ で生成される additive system $\mathcal{M}$ に他ならない。(ii) によれば $\mathcal{M}$ は $\mathcal{C}$ を含む quasi field であるがその様なものの最小が $\mathcal{F}$ であったので $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ となる。逆に $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ を含む additive system であるがその様なものの最小が $\mathcal{M}$ であったので $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ も成り立つ。即ち $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ である。 □

11.7 系. prefield $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度は $\mathcal{C}$ で生成される quasi field 上の有限加法的測度に一意的に拡張される。

証明. 補題 11.6(iii) と補題 8.7 による。 □

11.8 系. $\mathcal{F}$ を prefield $\mathcal{C}$ で生成される quasi field とし、m_1, m_2 を $\mathcal{F}$ 上で定義された有限加法的測度とする（必ずしも非負値でなくてよいが値 $-\infty$ は取らないとする）。このとき $m_1(A) \leq m_2(A) \ \forall A \in \mathcal{C}$ なら $m_1(A) \leq m_2(A) \ \forall A \in \mathcal{F}$ である。

証明. 補題 11.6(iii) に注意して加法性を使えばよい。 □

11.9 補題. m を quasi field $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度であるとする。
(i) m の σ 加法性は次と同値である。

$$A_n \in \mathcal{F}\ \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

(ii) $m(A) < +\infty\ \forall A \in \mathcal{F}$ をみたすとき m の σ 加法性は次と同値である。

$$A_n \in \mathcal{F}\ \forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) > 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

証明. (ii) 与えられた条件から σ 加法性を導こう。そこで

$$B_n \in \mathcal{F}\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_n \cap B_k = \emptyset\ n \neq k,\ A := \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

であるとする。$\mathcal{F}$ は quasi field であるから

$$A_n := A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k \in \mathcal{F}$$

またその定義により $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$ である。従って

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$$

が与えられた条件から得られる。他方、有限加法性と $m(A) < +\infty$ により

$$\sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = m(A) - m(A_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

である。よって $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m(A)$ が導けた。 □

11.10 定義. 集合の族 $\mathcal{M}$ が次の条件を満たすとき、$\mathcal{M}$ は monotone class をなすという。

(i) $A_n \in \mathcal{M},\ A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$
(ii) $A_n \in \mathcal{M},\ A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

なお条件 (i) を満たすとき、upper monotone class と呼ぶことにする。

11.11 補題. (i) monotone class たち $\mathcal{M}_\alpha$ に対し $\bigcap_\alpha \mathcal{M}_\alpha$ も monotone class である。
(ii) 任意の集合 B, σ-universe $\mathcal{U}$ と monotone class $\mathcal{M}$ に対して $\{A \in \mathcal{U} : A \cup B \in \mathcal{M}\}$, $\{A \in \mathcal{U} : A \setminus B \in \mathcal{M}\}$ および $\{A \in \mathcal{U} : B \setminus A \in \mathcal{M}\}$ は monotone class である。

証明. (ii) $B \setminus A_n \in \mathcal{M}\ n \in \mathbb{N}$ とする。$A_n \subset A_{n+1}\ \forall n$ なら $B \setminus A_n \supset B \setminus A_{n+1}$ であるから $B \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(B \setminus A_n) \in \mathcal{M}$ が導かれる。$A_n \supset A_{n+1}\ \forall n$ なら $B \setminus A_n \subset B \setminus A_{n+1}$ であるから $B \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \setminus A_n) \in \mathcal{M}$ が導かれる。 □

11.12 補題. (i) quasi field が upper monotone class でもあるならそれは quasi σ-field である。(ii) quasi field $\mathcal{F}$ で生成される monotone class $\mathcal{M}$ は quasi field である。

証明. (i) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ である。

(ii) 集合族 $\mathcal{F}$ は quasi field であることと関係 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ により

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}.$$

次の集合族は $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1$ を満たす。

$$\mathcal{M}_1 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{F}) : A \setminus B \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{F}) : A \setminus B \in \mathcal{M}\}$$

$\mathcal{M}$ は monotone class なので補題 11.11 によれば $\mathcal{M}_1$ は monotone class である。したがって関係 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}$ の定義により $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ すなわち $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{F}$ を得る。これは次と同値である。

$$A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}.$$

A, B の役割を入れ替えてみよう。

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \setminus B \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}.$$

よって次の集合族は $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_2$ を満たす。

$$\mathcal{M}_2 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : B \setminus A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}\}.$$

$\mathcal{M}_1$ に対するのと同じ論法を繰り返して $A \in \mathcal{M} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}$ を得る。同じ手続きなので $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ を導くのを記述するのは割愛する。また明らかに $\emptyset \in \mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ である。以上より $\mathcal{M}$ は quasi field であることが確かめられた。 □

次は**単調族定理**と呼ばれる。

11.13 定理. quasi field $\mathcal{F}$ で生成される monotone class は quasi σ-field $\sigma(\mathcal{F})$ に等しい。

証明. 補題 11.12 により $\mathcal{F}$ で生成される monotone class $\mathcal{M}$ は quasi σ-field である。従って関係 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ と $\sigma(\mathcal{F})$ の定義より $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ を得る。他方 quasi σ-field は monotone class である。よって $\sigma(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ を含む monotone class となり $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{F})$ を得る。 □

11.14 系. $\mathcal{C}$ を prefield とし、μ, ν を $\sigma(\mathcal{C})$ 上の有限値測度とする（必ずしも非負値でなくてよい）。このとき $\mu(A) \leq \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{C}$ なら $\mu(A) \leq \nu(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{C})$ である。

証明. $\mathcal{C}$ で生成される quasi field を $\mathcal{F}$ とかく。このとき $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{C})$ である。他方、系 11.8 により $\mu(A) \leq \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{F}$ が成り立つ。μ, ν は有限値測度であるから

$$\mathcal{M} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mu(A) \leq \nu(A)\}$$

は monotone class である。しかも上で確かめたように $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ を満たす。よって $\mathcal{F}$ で生成される monotone class は $\mathcal{M}$ に含まれる。前者は定理 11.13 によれば $\sigma(\mathcal{F})$ に一致する。したがって $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ 即ち $\mu(A) \leq \nu(A)\ \forall A \in \sigma(\mathcal{C})$ である。 □

11.15 例. $\mathcal{C}$ を prefield で空でない集合を含むもの、μ を $\sigma(\mathcal{C})$ 上の非負値測度、f, g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ 可積分関数とする。このとき次が成り立つ。

$$D := \operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g, \int_{A \cap D} f\,\mu \leq \int_{A \cap D} g\,\mu \ \forall A \in \mathcal{C} \Rightarrow f \leq g \ \mu\text{-a.e.}$$

証明. 系 11.14 と定理 6.15 □

12 直積測度

この節では測度の直積とその一意性について議論する。

前提

$(\mathcal{C}_1, m_1)$, $(\mathcal{C}_2, m_2)$ を有限加法的測度とする。

記号

集合族 $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ に対して集合族を以下で導入する。

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{A \times B\,;A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$$

集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ に属する集合を $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ **長方形集合**(rectangular set) という。

12.1 補題. 集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ は prefield である。

証明. まず $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。次に $A_1, B_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2, B_2 \in \mathcal{C}_2$ とする。このとき

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2.$$

他方 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ かつ $A_1 \times A_2 \neq \emptyset$ と仮定しよう。このとき $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ および

$$(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2) = (A_1 \times (B_2 \setminus A_2)) \cup ((B_1 \setminus A_1) \times B_2)$$

が成り立ち、右辺は非交差な合併である。さて $B_1 \setminus A_1$ の有限な $\mathcal{C}_1$-分割 Δ_1 と $B_2 \setminus A_2$ の有限な $\mathcal{C}_2$-分割 Δ_2 が存在する。

$$\{A_1 \times J\,; J \in \Delta_2\} \cup \{I \times B_2\,; I \in \Delta_1\}$$

が $(B_1 \times B_2) \setminus (A_1 \times A_2)$ の有限な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$-分割である。 □

集合族 $\mathcal{C}$ が与えられたとき $\sum \mathcal{C} := \bigcup_{J \in \mathcal{C}} J$ とおく。

記号

$\mathrm{proj}_1 : \sum \mathcal{C}_1 \times \sum \mathcal{C}_2 \to \sum \mathcal{C}_1$, $\mathrm{proj}_2 : \sum \mathcal{C}_1 \times \sum \mathcal{C}_2 \to \sum \mathcal{C}_2$ は次で定義される。

$$\mathrm{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \ \ \mathrm{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

12.2 補題. $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{C}_1,\ \mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{C}_2,\ A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$.

証明. $A_1 \subset \sum \mathcal{C}_1,\ A_2 \subset \sum \mathcal{C}_2$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\mathrm{proj}_1(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_1 & \text{if } A_2 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_2 = \emptyset \end{cases},\ \mathrm{proj}_2(A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_2 & \text{if } A_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{if } A_1 = \emptyset \end{cases}.$$

$A_1 \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A_2 = \emptyset$ であるから結論を得る。 □

記号

$m_1 \times m_2 : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ は約束 $0\infty = 0$ のもと次で定義される関数を表す。

$$A \mapsto m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A)$$

12.3 補題. m_1, m_2 ともに σ-加法的なら、$m_1 \times m_2$ は σ-加法的な有限加法的測度である。

証明. (i) まず補題 12.1 により集合族 $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ は prefield である。

(ii) 定義より $(m_1 \times m_2)(A) = m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ である。また $(m_1 \times m_2)(\emptyset) = m_1(\emptyset) m_2(\emptyset) = 0$ である。

(iii) Δ を $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2,\ A \neq \emptyset$ の可算な $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$-分割とする。このとき補題 12.2 により

$$1_{J:A}(x, y) = 1_{\mathrm{proj}_1 J:A_1}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 J:A_2}(y)\ J \in \Delta$$

ここで $A_1 := \mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{C}_1,\ A_2 := \mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{C}_2$ であり、さらに次が成り立つ。

$$\sum_{J \in \Delta} 1_{\mathrm{proj}_1 J:A_1}(x) 1_{\mathrm{proj}_2 J:A_2}(y) = 1\ \forall x \in A_1\, \forall y \in A_2.$$

σ-加法性により測度 $(\mathrm{Mble}(m_2), m_2^\star)$ は $(\mathcal{C}_2, m_2)$ を拡張する。各 $x \in A_1$ に対し $m_2^\star$ について A_2 上で積分する。補題 5.2 を適用して評価すると

$$m_2^\star(\mathrm{proj}_2 A) = \sum_{J \in \Delta} 1_{\mathrm{proj}_1 J:A_1}(x) m_2^\star(\mathrm{proj}_2 J) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\mathrm{proj}_2 J) 1_{\mathrm{proj}_1 J:A_1}(x)\ \forall x \in A_1$$

を得る。ここで $m_2^\star(I) = m_2(I)\ \forall I \in \mathcal{C}_2$ を使って書き換えている。他方、測度 $(\mathrm{Mble}(m_1), m_1^\star)$ は $(\mathcal{C}_1, m_1)$ を拡張する。$m_1^\star$ についての積分を再び補題 5.2 を適用して評価すると

$$m_2(\mathrm{proj}_2 A) m_1^\star(\mathrm{proj}_1 A) = \sum_{J \in \Delta} m_2(\mathrm{proj}_2 J) m_1^\star(\mathrm{proj}_1 J).$$

$m_1^\star(I) = m_1(I)\ \forall I \in \mathcal{C}_1$ および $m_1 \times m_2$ の定義により左辺は $(m_1 \times m_2)(A)$ に等しく右辺は $\sum_{J \in \Delta} (m_1 \times m_2)(J)$ に等しい。よって σ-加法性も確かめられた。 □

12.4 系. m_1, m_2 ともに σ-加法的とする。
(i) 測度 $(\mathrm{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^\star)$ は有限加法的測度 $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ を拡張する。
(ii) $(\mathcal{B}, \mu)$ を測度であって $m_1 \times m_2$ を拡張するものとするとき次が成り立つ。

$$\mu(A) = (m_1 \times m_2)^\star(A)\ \forall A \in \mathcal{B} \cap \{A \in \mathrm{Mble}(m_1 \times m_2) : m_1 \times m_2 \text{ に関して } \sigma\text{-有限}\}$$

f は $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B} \cap \mathrm{Mble}(m_1 \times m_2)$ 可測関数とする。このとき $\int |f|\ (m_1 \times m_2)^\star < +\infty$ であるなら $\int |f|\ \mu < +\infty$ かつ $\int f\ (m_1 \times m_2)^\star = \int f\ \mu$ が成り立つ。

証明. 定理 9.13, 補題 12.3, 補題 10.5 と定理 10.8 による。 $\square$

12.5 定理. $(\mathcal{C}_1, m_1)$, $(\mathcal{C}_2, m_2)$ はともに σ-加法的かつ σ-有限とする。このとき $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ で定義された測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = m_1(\mathrm{proj}_1 A) m_2(\mathrm{proj}_2 A) \ \forall A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$$

を満たすものは $(\mathrm{Mble}(m_1 \times m_2), (m_1 \times m_2)^\star)$ の $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ 上への制限に等しい。

証明. $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, m_1 \times m_2)$ は σ-有限となるので定理 10.11 より直ちに導かれる。 $\square$

一般に測度は σ-加法的な有限加法的測度でもあることをふまえて

12.6 定義. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を quasi σ-field とする。このとき quasi σ-field $\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ を *product quasi σ-field* と呼び記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で表す。また $\mathcal{B}_1$ を定義域とする測度 μ_1 と $\mathcal{B}_2$ を定義域とする測度 μ_2 について $(\mu_1 \times \mu_2)^\star$ の $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ への制限を**直積測度**(product measure) と呼び $\mu_1 \otimes \mu_2$ で表すことが多い。

12.7 系. $(\mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ を σ-有限な測度とする。このとき $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で定義された測度 μ であって、条件

$$\mu(A) = \mu_1(\mathrm{proj}_1 A) \mu_2(\mathrm{proj}_2 A) \ \forall A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$$

を満たすものがただひとつ存在し、それは直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ である。

12.8 補題. (i) 一般に集合族 $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ に対して $\sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ と $\sigma(\mathcal{I}) \otimes \sigma(\mathcal{J})$ は一致する。
(ii) m_1, m_2 はともに σ-加法的かつ σ-有限とする。μ_1 を $m_1^\star$ の $\sigma(\mathcal{C}_1)$ への制限、μ_2 を $m_2^\star$ の $\sigma(\mathcal{C}_2)$ への制限とすると $\mu_1 \otimes \mu_2$ は $(m_1 \times m_2)^\star$ を $\sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ に制限したものである。

証明. (i) まず $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \subset \sigma(\mathcal{I}) \times \sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{I}) \otimes \sigma(\mathcal{J})$ である。右辺は $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ を含む quasi σ-field であるがそのようなものの最小が $\sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ なので $\sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{I}) \otimes \sigma(\mathcal{J})$ を得る。次の集合族 $\mathcal{B}$ は quasi σ-field であり $\mathcal{J}$ を含む。

$$\mathcal{B} := \{B \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{J}) : A \times B \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J}) \forall A \in \mathcal{I}\}.$$

従って $\sigma(\mathcal{J}) \subset \mathcal{B}$ である。すなわち

$$B \in \sigma(\mathcal{J}) \Rightarrow A \times B \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J}) \ \forall A \in \mathcal{I}.$$

ゆえに次の集合族は $\mathcal{I}$ を含む。また quasi σ-field でもある。

$$\{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{I}) : A \times B \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J}) \forall B \in \sigma(\mathcal{J})\}.$$

従って $\sigma(\mathcal{I})$ は上の集合族に含まれる。以上より

$$A \in \sigma(\mathcal{I}), B \in \sigma(\mathcal{J}) \Rightarrow A \times B \in \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J}).$$

言い換えると $\sigma(\mathcal{I}) \times \sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ であるから $\sigma(\mathcal{I}) \otimes \sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ を得る。
(ii) (i) により $\mu_1 \otimes \mu_2$ は定理 12.5 の条件を満たす。 $\square$

13　直積測度の構造

直積測度の構造をその断面から観察するのが Fubini の定理である。それに向けてのお膳立てを行うのがこの節の目的である。可測性に関する概念が多変数になることにより込み入ったものになる。この節の最重点は補題 13.8 である。

前提

$(\mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ を σ-有限な測度で $\mathcal{B}_1 \neq \{\emptyset\}$, $\mathcal{B}_2 \neq \{\emptyset\}$ であるものとする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 quasi σ-field を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 上の一意的な測度である。系 12.7 を参照

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \ \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

ここでは 0 と ∞ の積は 0 と約束している。

13.1 補題. $D_1 \in \mathcal{B}_1$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \in \mathcal{B}_2$, $D_2 \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, $A \subset D := D_1 \times D_2$ とする。
(i) 各 $x \in D_1$ に対して関数 $D_2 \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1_{A:D}(x, y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。
(ii) 各 $y \in D_2$ に対して関数 $D_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1_{A:D}(x, y)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

証明. (i) 次は quasi σ-field でしかも $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む。

$$\mathcal{B} := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) : y \mapsto 1_{A \cap D:D}(x, y)\ \mathcal{B}_2\text{-可測}\ \forall x \in D_1\}.$$

そのようなものの最小が $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ なので $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ すなわち

$$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Rightarrow y \mapsto 1_{A \cap D:D}(x, y)\ \mathcal{B}_2\text{-可測}\ \forall x \in D_1$$

を得る。(ii) を示すには x, y の役割を入れ替えればよい。 □

$D_1 \in \mathcal{B}_1$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \in \mathcal{B}_2$, $D_2 \neq \emptyset$, $D := D_1 \times D_2$ とする。今までの経験からすると次の集合族は $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を含む quasi σ-field であるように思われる。

$$\{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_{D_2} 1_{A \cap D:D}(x, y)\, \mu_2(dy)\ \text{は}\ \mathcal{B}_1\text{-可測}\ \}.$$

しかしこれがかなり手強いしろものでその証明を与える補題 13.8 は Fubini の定理において中心をなすものとなる。見通しよく議論するのには新しい概念を導入する必要がある。

13.2 定義. 集合族 $\mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき σ-partition system をなすという。

(i) $\emptyset \in \mathcal{D}$.
(ii) $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$, $A \supset B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$.
(iii) $A_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

任意の quasi σ-field は σ-partition system である。付帯条件を付けると逆も正しい。

13.3 補題. $\mathcal{D}$ を σ-partition system とする.
(i) $\mathcal{D}$ が π-system でもあるなら $\mathcal{D}$ は quasi σ-field である。
(ii) 任意の集合 B と σ-universe $\mathcal{U}$ に対し $\{A \in \mathcal{U} : A \cap B \in \mathcal{D}\}$ は σ-partition system である。

証明. (i) $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$ とする。まず $A \cap B \in \mathcal{D}$, $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$, $B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$ であり、これらは互いに非交差である。よって

$$A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B = (A \cap B) \cup \{A \setminus (A \cap B)\} \cup \{B \setminus (A \cap B)\} \in \mathcal{D}.$$

従って補題 9.3 より $\mathcal{D}$ は quasi σ-field である。
(ii) まず $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{D}$ である。次に $A_1 \cap B \in \mathcal{D}$, $A_2 \cap B \in \mathcal{D}$, $A_1 \supset A_2$ とすると

$$(A_1 \setminus A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) \in \mathcal{D}$$

である。最後に $A_n \cap B \in \mathcal{D}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $n \neq m$ とすると

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \mathcal{D}$$

が導かれる。よって σ-partition system の条件がすべて確認できた。 □

13.4 補題. (i) σ-partition system たち $\mathcal{D}_\alpha$ に対し $\bigcap_\alpha \mathcal{D}_\alpha$ も σ-partition system である。
(ii) 集合の族 $\mathcal{A}$ に対して次の条件を満たす集合族がただ一つ存在する。

1° $\mathcal{D}$ は σ-partition system かつ $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ である。
2° 条件 1° を満たす任意の集合族 $\mathcal{D}'$ に対して $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ である。**最小性**

13.5 定義. 集合の族 $\mathcal{A}$ に対し補題 13.4(ii) で規定される σ-partition system を **$\mathcal{A}$ で生成される** *σ-partition system* と呼ぶ。(一つの実現は $\bigcap\{\mathcal{D};\ \mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{A})\ \sigma\text{-partition system}\}$)

13.6 補題. π-system $\mathcal{C}$ で生成される σ-partition system $\mathcal{D}$ は π-system である。

証明. 集合族 $\mathcal{C}$ は π システムであることと関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ により

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{C}.$$

次の集合族は $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1$ を満たす。

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{C}\} = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}\}$$

$\mathcal{D}$ は σ-partition system なので補題 13.3(ii) と補題 13.4(i) によれば $\mathcal{D}_1$ は σ-partition system である。したがって関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}$ の定義により $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$ すなわち $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$ $\forall B \in \mathcal{C}$ を得る。これは次と同値である。

$$A \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}.$$

A, B の役割を入れ替えてみよう。

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}.$$

よって次の集合族は $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_2$ を満たす。

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \sigma\mathfrak{U}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}\}.$$

$\mathcal{D}_1$ に対するのと同じ論法を繰り返して $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}\ \forall B \in \mathcal{D}$ を得る。 □

13.7 定理. π-system $\mathcal{C}$ で生成される σ-partition system は quasi σ-field $\sigma(\mathcal{C})$ に等しい。

証明. 補題 13.6 と補題 13.3(i) により $\mathcal{C}$ で生成される σ-partition system $\mathcal{D}$ は quasi σ-field である。従って関係 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ と $\sigma(\mathcal{C})$ の定義より $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ を得る。他方 quasi σ-field は σ-partition system であるから $\sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ を含む σ-partition system となり $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$ を得る。 □

記号

$\mathrm{proj}_1 : \sum\mathcal{B}_1 \times \sum\mathcal{B}_2 \to \sum\mathcal{B}_1$, $\mathrm{proj}_2 : \sum\mathcal{B}_1 \times \sum\mathcal{B}_2 \to \sum\mathcal{B}_2$ は次で定義される。

$$\mathrm{proj}_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \ \ \mathrm{proj}_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

警告

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ なら $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$, $\mathrm{proj}_2 A \in \mathcal{B}_2$, $A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$ であるが、一般には $A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ から $\mathrm{proj}_1 A \in \mathcal{B}_1$ や $A = (\mathrm{proj}_1 A) \times (\mathrm{proj}_2 A)$ は従わない。

13.8 補題. $D_1 \in \mathcal{B}_1$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \in \mathcal{B}_2$, $D_2 \neq \emptyset$ とする。$A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, $A \subset D := D_1 \times D_2$ なら関数 $D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{D_2} 1_{A:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

証明. $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ は σ-有限であるから補題 10.2 により D_2 の可算 $\mathcal{B}_2$-分割 Δ で

$$\mu_2(J) < +\infty\ \forall J \in \Delta$$

を満たすものが存在する。次の集合族を考察する。

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : x \mapsto \int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\ \mathcal{B}_1\text{-可測}\ \forall J \in \Delta\}.$$

$A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ に対し $A_1 := \mathrm{proj}_1 A \cap D_1$, $A_2 := \mathrm{proj}_2 A \cap D_2$ としよう。このとき

$$1_{A\cap D:D}(x,y) = 1_{A_1:D_1}(x) 1_{A_2:D_2}(y)\,\forall x \in D_1\,\forall y \in D_2 \text{ かつ } A_2 \in \mathcal{B}_2$$

であることが補題 12.2 により従う。よって

$$\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy) = 1_{A_1:D_1}(x) \int_J 1_{A_2:D_2}\,\mu_2 = 1_{A_1:D_1}(x)\mu_2(J \cap A_2)\ \forall x \in D_1.$$

従って $A_1 \in \mathcal{B}_1$ より各 $J \in \Delta$ に対し $x \mapsto \displaystyle\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。即ち

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}.$$

次に $A\in\mathcal{D}$, $B\in\mathcal{D}$, $A\subset B$ としよう。このとき $1_{B\cap D:D}-1_{A\cap D:D}=1_{(B\setminus A)\cap D:D}$ である。さて

$$0\le\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\le\int_J 1_{B\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\le\mu_2(J)<+\infty\ \forall J\in\Delta$$

であるから定理 4.6 を適用して

$$\int_J 1_{(B\setminus A)\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)=\int_J 1_{B\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)-\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\ \forall J\in\Delta$$

を得る。右辺の各項は $A\in\mathcal{D}$, $B\in\mathcal{D}$ より x に関して $\mathcal{B}_1$-可測である。従って

$$A\in\mathcal{D},B\in\mathcal{D},A\subset B\Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{D}.$$

最後に $A_n\in\mathcal{D}\ \forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\cap A_m=\emptyset\ n\ne m$, $A:=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ とすると定理 5.2 より

$$\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)=\int_J\sum_{n\in\mathbb{N}}1_{A_n\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_J 1_{A_n\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\ \forall J\in\Delta$$

が導かれる。各関数 $x\mapsto\int_J 1_{A_n\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $A_n\in\mathcal{D}$ より $\mathcal{B}_1$-可測である。よって関数 $x\mapsto\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$ $(A:=\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$ の $\mathcal{B}_1$-可測性を得る。従って

$$A_n\in\mathcal{D}\ \forall n\in\mathbb{N},A_n\cap A_m\ n\ne m\Rightarrow\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{D}.$$

以上より $\mathcal{D}$ は π-system $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ を含む σ-partition system である。定理 13.7 を適用して

$$\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2=\sigma(\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2)=\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\text{で生成される }\sigma\text{-partition system }\subset\mathcal{D}$$

が得られる。すなわち

$$A\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\Rightarrow x\mapsto\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\ \mathcal{B}_1\text{-可測}\ \forall J\in\Delta.$$

$A\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ とする。Δ は D_2 の可算 $\mathcal{B}_2$-分割なので定理 5.3 を適用して

$$\int_{D_2}1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)=\sum_{J\in\Delta}\int_J 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\ \forall x\in D_1$$

を得る。従って $x\mapsto\int_{D_2}1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。 □

次は *Fubini* **の定理**で骨格を形成するが、これを述べるには補題 13.8 が不可欠である。

13.9 定理. $D_1\in\mathcal{B}_1$, $D_1\ne\emptyset$, $D_2\in\mathcal{B}_2$, $D_2\ne\emptyset$ とする。$A\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$, $A\subset D:=D_1\times D_2$ なら

$$\int_{D_1}\Big(\int_{D_2}1_{A:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)=(\mu_1\otimes\mu_2)(A).$$

証明. 補題 13.8 のおかげで関数 $\mu : \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ を次で定義することができる。

$$\mu(A) := \int_{D_1} \Big(\int_{D_2} 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).$$

その定義から直ちに $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ かつ $\mu(\emptyset) = 0$ である。Δ を $A \in B_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の可算 $B_1 \otimes \mathcal{B}_2$-分割とする。このとき

$$1_{A\cap D:D}(x,y) = \sum_{J\in\Delta} 1_{J\cap D:D}(x,y)$$

である。まず補題 5.2 を適用して

$$\int_{D_2} 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy) = \sum_{J\in\Delta} \int_{D_2} 1_{J\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)$$

を得る。もう一度補題 5.2 を適用して

$$\int_{D_1} \Big(\int_{D_2} 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \sum_{J\in\Delta} \int_{D_1} \Big(\int_{D_2} 1_{J\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)$$

が導かれる。即ち μ は σ-加法的である。ゆえに

$$(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu)\ \text{は測度である。}$$

次に $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ に対して $A_1 := \mathrm{proj}_1 A \cap D_1,\ A_2 := \mathrm{proj}_2 A \cap D_2$ としよう。このとき

$$A_1 \in \mathcal{B}_1,\ A_2 \in \mathcal{B}_2,\ 1_{A\cap D:D}(x,y) = 1_{A_1:D_1}(x) 1_{A_2:D_2}(y)\ \forall x \in D_1\, y \in D_2$$

が補題 12.2 より従うから次が成り立つ。

$$\int_{D_1} \Big(\int_{D_2} 1_{A\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A \cap D).$$

$(\mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ は σ-有限であるから系 12.7 により $\mu = (\mu_1 \otimes \mu_2)(\cdot \cap D)$ が導かれる。 □

この節では定理 13.7 を直積測度の構造を調べるのに活用したが、それ以外にも広い応用例を持つ。一意性証明への適用が典型的であるので、その一つを紹介しておく。例 11.15 における仮定ならびに結論と比較せよ。

13.10 定理. $\mathcal{C}$ を π-system で空でない集合を含むもの、μ を $\sigma(\mathcal{C})$ 上の測度、$f,\ g$ を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\sigma(\mathcal{C}), \mu)$ 可積分関数とする。このとき次が成り立つ。

$$D := \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g, \int_{A\cap D} f\,\mu = \int_{A\cap D} g\,\mu\ \forall A \in \mathcal{C} \Rightarrow f = g\ \mu\text{-a.e.}$$

証明. 仮定により次の集合族は $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を満たす。また $\emptyset \in \mathcal{D}$ は自明である。

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \int_{A\cap D} f\,\mu = \int_{A\cap D} g\,\mu\}.$$

$A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ としよう。補題 4.15(iii) を適用して

$$\int_{(B\setminus A)\cap D} f\,\mu = \int_{B\cap D} f\,\mu - \int_{A\cap D} f\,\mu = \int_{B\cap D} g\,\mu - \int_{A\cap D} g\,\mu = \int_{(B\setminus A)\cap D} g\,\mu$$

即ち $B \setminus A \in \mathcal{D}$ を得る。次に $A_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m\ n \neq m$ とすると定理 5.5 より

$$\int_{A\cap D} f\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n\cap D} f\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n\cap D} g\,\mu = \int_{A\cap D} g\,\mu,$$

ここで $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とした、即ち $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ が導かれる。以上より $\mathcal{D}$ は π-system $\mathcal{C}$ を含む σ-partition system である。定理 13.7 より

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\ \text{で生成される}\ \sigma\text{-partition system}\ \subset \mathcal{D}$$

関係 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ は次を意味する。

$$\int_{A\cap D} f\,\mu = \int_{A\cap D} g\,\mu\ \forall A \in \sigma(\mathcal{C}).$$

系 6.17 を適用して $f = g$ μ-a.e. を得る。 □

14 Fubini-Tonelli の定理と単調収束定理

Fubini の定理を紹介する。まず単調収束定理が果たす役割を中心に考察を進めていく。

前提

$(\mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$ を σ-有限な測度で $\mathcal{B}_1 \neq \{\emptyset\}$, $\mathcal{B}_2 \neq \{\emptyset\}$ であるものとする。

再確認

記号 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ は直積 quasi σ-field を表す。このとき直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ は次の条件を満たす $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 上の一意的な測度である。

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)\ \forall A \in \mathcal{B}_1 \forall B \in \mathcal{B}_2.$$

ここでは 0 と ∞ の積は 0 と約束している。

14.1 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測関数 f が $D_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $D_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \{\emptyset\}$ に対して $D_1 \times D_2 \subset \operatorname{Dom} f$ を満たすなら各 $x \in D_1$ に対して関数 $D_2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $y \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。

証明. $a \in \mathbb{R}$ を任意に固定する。$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 可測性により

$$A := \{(x, y) \in D_1 \times D_2 : f(x, y) < a\} \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2.$$

ここで $x \in D_1$ を固定する。補題 13.1(i) により $y \mapsto 1_{A:D_1\times D_2}(x, y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測であるから

$$\{y \in D_2 : f(x, y) < a\} = \{y \in D_2 : 1_{A:D_1\times D_2}(x, y) \geq 1\} \in \mathcal{B}_2.$$

よって $y \mapsto f(x, y)$ は $\mathcal{B}_2$-可測である。 □

非負値可測関数については *Fubini-Tonelli* **の定理**は非常に明解である。

14.2 定理. f は非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測関数で $D_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $D_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \{\emptyset\}$ に対し $D_1 \times D_2 \subset \mathrm{Dom}\, f$ を満たすとする。このとき $D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測であり次が成り立つ。

$$\int_{D_1}\Big(\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \int_{D_1\times D_2} f\ \mu_1\otimes\mu_2.$$

証明. まず、f が非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 単関数である場合を検討する。このとき

$$f|_D = \sum_{z\in \mathrm{Image} f} z 1_{f^{-1}\{z\}\cap D:D} \text{ ただし } D := D_1 \times D_2$$

と書け、右辺は有限和である。定理 4.2 により

$$\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy) = \sum_{z\in \mathrm{Image} f} z \int_{D_2} 1_{f^{-1}\{z\}\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy).$$

補題 13.8 によれば右辺は $\mathcal{B}_1$-可測関数の有限和を定義する。従って $x \mapsto \int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ の $\mathcal{B}_1$-可測性を得る。次に補題 13.9 を適用して

$$\begin{aligned}\int_{D_1}\Big(\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) &= \sum_{z\in \mathrm{Image} f} z \int_{D_1}\Big(\int_{D_2} 1_{f^{-1}\{z\}\cap D:D}(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)\\ &= \sum_{z\in \mathrm{Image} f} z\ (\mu_1\otimes\mu_2)(f^{-1}\{z\}\cap D) = \int f|_D\ \mu_1\otimes\mu_2.\end{aligned}$$

一般の場合には補題 3.9(ii) により非負値 $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-単関数の列 g_n で

$$\mathrm{Dom}\, g_n = \mathrm{Dom}\, f,\ g_n \le g_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x,y) = g(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathrm{Dom}\, f$$

を満たすものが存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \mapsto \int_{D_2} g_n(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測であり

$$\int_{D_1}\Big(\int_{D_2} g_n(x,y)\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx) = \int_D g_n\ \mu_1\otimes\mu_2.$$

なので定理 3.10 を適用して結論に至る。 □

定理 14.2 の証明に用いた論法、すなわち単関数について証明できればあとは単調収束定理によって処理できるという手順、は非常に有効なものであり、**スタンダードマシン**(standard machine) と呼ぶ研究者もいる。じつは補題 4.11 や定理 5.3(ii) の証明においてこの論法が既に登場していたのである。是非確認しておこう。

14.3 定理. f を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}_1$-可測関数、g を $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}_2$-可測関数とする。
(i) 関数 $\mathrm{Dom}\, f \times \mathrm{Dom}\, g \to \overline{\mathbb{R}}$, $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ は $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$-可測である。
(ii) f, g ともに非負値であるなら $\displaystyle\int f(x)g(y)\ \mu_1\otimes\mu_2(dxdy) = \int f\,\mu_1 \int g\,\mu_2$

証明. (i) まず $(x,y)\mapsto f(x)$ が $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測であることを確かめる。関数 f の $\mathcal{B}_1$-可測性により $\{f<a\}\in\mathcal{B}_1\ \forall a\in\mathbb{R}$ である。よって $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ の定義により

$$\{(x,y):f(x)<a\}=\{f<a\}\times\operatorname{Dom}g\in\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\subset\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

同様にして $(x,y)\mapsto g(y)$ の $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測性もわかる。従って $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ が $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測であることが補題 4.10 を適用して導かれる。

(ii) (i) と定理 14.2 から明らかと言うわけではない。何が問題かと言えば、$f(x)=+\infty$ という可能性があるからである。よって

$$\int f(x)g(y)\,\mu_2(dy)=f(x)\int g(y)\,\mu_2(dy)$$

が $f(x)=+\infty$ であっても成り立つことを確かめる必要がある。ここで重要なのは積についての約束 $0\infty=0$ である。この約束に従うと

$$\begin{aligned}\{y:g(y)>0\}&=\{y:f(x)g(y)=+\infty\},\\ \{y:g(y)=0\}&=\{y:f(x)g(y)=0\}\end{aligned}$$

である。後者は $\operatorname{Dom}g$ に関して前者の補集合である。補題 4.15(i) を適用して

$$\begin{aligned}\int f(x)g(y)\,\mu_2(dy)&=\int_{\{g>0\}}f(x)g(y)\,\mu_2(dy)+\int_{\{g=0\}}f(x)g(y)\,\mu_2(dy)\\&=+\infty\mu_2(\{y:g(y)>0\})+0\mu_2(\{y:g(y)=0\})\end{aligned}$$

まず $\mu_2(\{y:g(y)>0\})=0$ と仮定する。このとき補題 4.8 を適用して

$$f(x)\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}g(y)\,\mu_2(dy)=+\infty 0=0=\int_{\mathbb{R}^{d(2)}}f(x)g(y)\,\mu_2(dy)$$

次に $\mu_2(\{y:g(y)>0\})>0$ と仮定する。補題 4.8 より $\int g\,\mu_2>0$ であるから

$$f(x)\int g(y)\,\mu_2(dy)=+\infty=\int f(x)g(y)\,\mu_2(dy)$$

同様にして $\int g\,\mu_2=+\infty$ の場合も含めて

$$\int f(x)\int g(y)\,\mu_2(dy)\ \mu_1(dx)=\int g(y)\,\mu_2(dy)\int f(x)\ \mu_1(dx)$$

が成り立つことを確かめられる。 □

ここから先は almost everywhere の概念との関わりを中心に考察を進めていく。

次の補題およびその系は定理 14.2 のきわだって重要な応用例である。また非負値とは限らない関数に Fubini の定理を適用する場合にその前提として**可積分性判定**が必要だがその手順として非常に有用である。

14.4 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測関数 f が $D_1\in\mathcal{B}_1\setminus\{\emptyset\}$, $D_2\in\mathcal{B}_2\setminus\{\emptyset\}$ に対して $D_1\times D_2\subset\operatorname{Dom}f$ を満たすなら以下の同値性が成り立つ。

$$f\ D_1\times D_2 \text{ 上で } \mu_1\otimes\mu_2\text{-可積分} \Leftrightarrow \int_{D_1}\Big(\int_{D_2}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)<+\infty$$

証明. 定理 14.2(ii) から直ちに従う。 □

14.5 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2,\mu_1\otimes\mu_2)$-可積分関数 f が $D_1\in\mathcal{B}_1\setminus\{\emptyset\}$, $D_2\in\mathcal{B}_2\setminus\{\emptyset\}$ に対し $D_1\times D_2\subset\operatorname{Dom} f$ を満たすとする。

(i) 関数 $D_1\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto\int_{D_2}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ と $x\mapsto\int_{D_2}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ はともに $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分であって次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{D_1\times D_2} f\ \mu_1\otimes\mu_2 &= \int_{D_1}\Big(\int_{D_2}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)\\ &\quad -\int_{D_1}\Big(\int_{D_2}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).\end{aligned}$$

(ii) $\{x\in D_1:\int_{D_2}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)<+\infty\}\in\mathcal{B}_1$ は D_1 に関して μ_1-a.e. 集合である。

証明. (i) 非負値な $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$-可測関数 $\max\{f,0\}$ に定理 14.2 を適用して関数

$$(\star)\qquad D_1\to\overline{\mathbb{R}},x\mapsto\int_{D_2}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$$

の $\mathcal{B}_1$-可測性と次の等式を得る。f は $\mu_1\otimes\mu_2$-可積分なので右辺の積分は有限である。

$$\int_{D_1}\Big(\int_{D_2}\max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)=\int_{D_1\times D_2}\max\{f,0\}\ \mu_1\otimes\mu_2<+\infty.$$

従って $(\star)$ は μ_1-可積分である。同様に $x\mapsto\int_{D_2}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)$ の $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分性と次の等式が導かれる。

$$\int_{D_1}\Big(\int_{D_2}\max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)=\int_{D_1\times D_2}\max\{-f,0\}\ \mu_1\otimes\mu_2<+\infty$$

得られた等式を差し引きして (i) に関する考察を終わる。(ii) 補題 14.4 を適用して $x\mapsto\int_{D_2}|f(x,y)|\,\mu_2(dy)$ の $(\mathcal{B}_1,\mu_1)$-可積分性を得る。従って補題3.3(iv) により結論が導かれる。 □

ここで $\infty-\infty$ を回避するために行った和に関する取り決めを思い出そう。

約束

$\overline{\mathbb{R}}$ 値関数 f, g に対して条件 $\operatorname{Dom} g=\operatorname{Dom} f$, $\{f=+\infty,g=-\infty\}=\emptyset$, $\{f=-\infty,g=+\infty\}=\emptyset$ が成立するときに限って和 $f+g$ を考える。

累次積分を行う際に次の事態が起こりうる。

$$\int_{D_2} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) = +\infty, \int_{D_2} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) = +\infty.$$

補題 14.5(ii) がその処理策を与える。それによると上のいずれかであるような $x \in D_1$ 全体は μ_1-零集合をなす。従って μ_1-a.e. 集合上では $\infty - \infty$ は回避されるわけである。

記号

$\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$-可測関数 f が $D_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $D_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \{\emptyset\}$ に対して $D_1 \times D_2 \subset \mathrm{Dom}\, f$ を満たすとして

$$\overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy) := \begin{cases} \displaystyle\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy) & \text{if} \displaystyle\int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\underline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy) := \begin{cases} \displaystyle\int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy) & \text{if} \displaystyle\int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

14.6 補題. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$-可測関数 f が $D_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $D_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \{\emptyset\}$ に対して $D_1 \times D_2 \subset \mathrm{Dom}\, f$ を満たすとする。

(i) 関数 $D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$-可測である。

(ii) $\underline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy) = -\overline{\int_{D_2}} - f(x,y)\,\mu_2(dy)$ $\forall x \in D_1$.

(iii) $\left|\overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy)\right| \le \int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy)$ $\forall x \in D_1$.

証明. $a \in \mathbb{R}$ とする。定理 14.2(i) により次の集合はいずれも $\mathcal{B}_1$ に属する。

$$\{x \in D_1 : \int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty\}$$
$$\{x \in D_1 : \int_{D_2} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) < \int_{D_2} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) + a\}$$

それらの共通部がまさにつぎであり $\mathcal{B}_1$ に属する。

$$\{x \in D_1 : \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy) < a\}$$

(ii) は定義から直ちに従う。(iii) を示すには定理 4.4(ii) を適用すればよい。 □

ついに *Fubini* **の定理**にたどり着いた。

14.7 定理. $\overline{\mathbb{R}}$ 値 $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$-可積分関数 f が $D_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $D_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \{\emptyset\}$ に対して $D_1 \times D_2 \subset \mathrm{Dom}\, f$ を満たすとする。

(i) $\underline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy) = \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ μ_1-a.e. $x \in D_1$.

(ii) $\mathcal{B}_1$-可測関数 $g : D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ が $g(x) = \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ μ_1-a.e. $x \in D_1$ を満たせば、それは μ_1-可積分であり次が成り立つ。

$$\int_{D_1 \times D_2} f \ \mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{D_1} g\,\mu_1.$$

証明. (i) 補題 14.5(ii) により次の集合は $\mathcal{B}_1$ に属しかつ μ_1-a.e. 集合である。

$$A := \{x \in D_1 : \int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty\}.$$

二つの関数は A 上で等しいので (i) が成り立つ。

(ii) 仮定と補題 14.6(iii) により次が成り立つ。

$$|g(x)| \le \int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy)\ \mu_1\text{-a.e. } x \in D_1.$$

従って定理 6.7(i) と定理 14.2(iii) を適用して

$$\int_{D_1} |g|\,\mu_1 \le \int |f| \ \mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$$

を得る。すなわち g は μ_1-可積分である。次の集合も $\mathcal{B}_1$ に属しかつ μ_1-a.e. 集合である。

$$B := \{x \in D_1 : g(x) = \overline{\int_{D_2}} f(x,y)\,\mu_2(dy)\}.$$

系 6.12 によれば、$A \cap B$ も μ_1-a.e. 集合である。さらに次が成り立つ。

$$g(x) = \int_{D_2} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy) - \int_{D_2} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\ \forall x \in A \cap B.$$

各項は μ_1-可積分なので定理 4.6 により

$$\begin{aligned}\int_{A\cap B} g\,\mu_1 = &\int_{A\cap B} \Big(\int_{D_2} \max\{f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx)\\ &- \int_{A\cap B} \Big(\int_{D_2} \max\{-f(x,y),0\}\,\mu_2(dy)\Big)\,\mu_1(dx).\end{aligned}$$

を得る。ここで $A \cap B$ は D_1 の μ_1-a.e. 集合なので系 4.16(ii) により $A \cap B$ 上での積分は D_1 上でのものに等しい。最後に補題 14.5(i) と組み合わせて結論を得る。 □

14.8 注意. $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ 可測関数 $f : D_1 \times D_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\int_{D_2} |f(x,y)|\,\mu_2(dy) < +\infty\ \forall x \in D_1$ を満たすなら $D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \int_{D_2} f(x,y)\,\mu_2(dy)$ は $\mathcal{B}_1$ 可測である。

次の定理は確率論における独立性の取り扱いに関して決定的な役割を果たす。

14.9 定理. 関数 $f : D_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_1, \mu_1)$-可積分、関数 $g : D_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ は $(\mathcal{B}_2, \mu_2)$-可積分とする。このとき関数 $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ は $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$-可積分であり

$$\int f(x)g(y)\ \mu_1 \otimes \mu_2(dxdy) = \int f\,\mu_1 \int g\,\mu_2.$$

証明. 定理 14.3 と定理 14.7 から従う。 $\square$