平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.1（4 月 9 日配付）略解

問題 1. $\overrightarrow{a} = (3, -2)$

問題 2. $\overrightarrow{b}$ は何でも良いので $\overrightarrow{a}$ 自身を選ぶこともできる。よって $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ が成り立つことになるから $\overrightarrow{a} = (0, 0, 0)$ を得る。逆は $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ より明らか。

問題 3. 与えられた方程式を移項し行列を使って表現すると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ただし } A := \begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix}$$

ここで A が逆行列を持つ必要十分条件は $(3-k)(4-k) - 2 \neq 0$ 即ち $k \neq 2$ かつ $k \neq 5$ である。このときは $x = 0,\ y = 0$ が唯一の解である。$k = 2$ のときは直線 $x + y = 0$ 上の全ての (x, y) が解を与える。$k = 5$ のときは直線 $2x - y = 0$ 上の全ての (x, y) が解を与える。以上より $x = 0,\ y = 0$ 以外の解を持つような実数 k の条件は $k = 2$ または $k = 5$ である。

問題 4. $AB = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

問題 5. (1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. (2) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. (5) $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 1-2^n \\ -2+2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

問題 6. ともに $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\psi) & -\sin(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi) & \cos(\theta+\psi) \end{pmatrix}$. 加法定理による。

問題 7. (1) $(a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba')$.

(2) $\begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-ba' \\ ab'+ba' & aa'-bb' \end{pmatrix} = (aa'-bb')E + (ab'+ba')J$. ここで $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$