平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.2（4 月 16 日配付）

問題 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 積 AB, BA, AC, CA をそれぞれ求めよ。

(2) 積 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 積 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} C$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} C$ をそれぞれ求めよ。

問題 2. 次の積をそれぞれ求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

問題 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 方程式 $\begin{cases} X + 2Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$ をみたす 2×2 行列 X, Y を求めよ。

(2) 方程式 $\begin{cases} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{cases}$ をみたす 2×2 行列 X, Y を求めよ。

(3) 方程式 $\begin{cases} 3X - 5Y = C \\ -X + 2Y = D \end{cases}$ をみたす 2×3 行列 X, Y を求めよ。

問題 4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $(A+B)(A-B)$, $A^2 - B^2$ をそれぞれ求め比較せよ。

(2) $(C+D)(C-D)$, $C^2 - D^2$ をそれぞれ求め比較せよ。

問題 5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) AB, $(AB)C$, BC, $A(BC)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $AB - 3B$, $(AB - 3B)C$, $A(BC) - 3BC$ をそれぞれ求めよ。

(3) $A^2 + CB$ は定義されない。その理由を述べよ。

定義 1. 行列 A の行と列を入れ替えてできる行列を A の**転置行列**といい ${}^t\!A$ で表す。例えば

$$ {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^t\!\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} $$

問題 6. 行列 A, B, C, D を次のものとする。

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}. $$

(1) AB, ${}^t(AB)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $AB + {}^t\!B\,{}^t\!A$, $AB - {}^t\!B\,{}^t\!A$ をそれぞれ求めよ。

(3) ${}^t(AB - C)$, ${}^t(AB - D)$ をそれぞれ求めよ。

問題 7. 行列 A, B, C, D を次のものとする。

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} $$

(1) A^2, B^2, C^2, C^3, D^2, D^3, D^4 をそれぞれ求めよ。

(2) 正の整数 n に対して A^n, B^n, C^n をそれぞれ求めよ。また D^{10} を求めよ。

定義 2. 複素数 $z = x + iy$（x と y は実数）に対して、x を z の**実部**、y を z の**虚部**といい、それぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す。また $x - iy$ を z の**複素共役**といい $\overline{z}$ で表す。更に $\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**といい $|z|$ で表す。

問題 8. 複素数 $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\overline{\omega} = \omega^2$ であることを示せ。

(2) m, n を整数とする。m または n が 2 で割りきれないとき $|m + n\omega|^2$ は奇数であることを示せ。

問題 9. 複素数 $z = (i-x)/(i+x)$（x は実数）に対して以下の問いに答えよ。

(1) $|z| = 1,\ \mathrm{Re}\, z > -1$ であることを示せ。

(2) $z = (-1+i\sqrt{3})/2$ となるような実数 x を求めよ。

問題 10. 複素数 $a+ib$（a と b は実数）に対して以下の問いに答えよ。

(1) 実数 $c,\ d$ は $c^2+d^2 \neq 0$ を満たすとする。$(a+ib)(c+id) = 0$ となるのは $a=0,\ b=0$ のときのみであることを示せ。

(2) 実数 $c,\ d$ に対して次の等式を示せ。

$$\overline{(a+ib)(c+id)} = (a-ib)(c-id),\ \ |(a+ib)(c+id)| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}.$$

(3) 実数 $c,\ d$ に対して不等式 $\mathrm{Re}\{(a+ib)(c+id)\} \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ を示せ。

問題 11. 複素数 $\alpha,\ \beta$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $\overline{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$ であることを示せ。

(2) $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ とする。$\beta = k\alpha$ となる正の実数 k があるための必要十分条件は $\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta) = |\alpha||\beta|$ であることを示せ。

(3) $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ とする。$\beta = ki\alpha$ となる正の実数 k があるための必要十分条件は $\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = |\alpha||\beta|$ であることを示せ。

定義 3. 行列 A の各成分をその複素共役に置き換えてできる行列を A の**複素共役**といい $\overline{A}$ で表す。また ${}^t\overline{A}$ を A の**随伴共役**といい A^* で表す。例えば 2×3 行列に対しては

$$\overline{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{23}} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} \end{pmatrix}$$

問題 12. 行列 $I,\ J,\ K,\ O$ を次のものとする。

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 方程式 $xI + yJ + zK = O$ を満たす実数 $x,\ y,\ z$ は $x=0,\ y=0,\ z=0$ のみであることを示せ。

(2) 実数 $x,\ y,\ z$ に対して行列 $A = xI + yJ + zK$ は $A^* = -A$ を満たすことを示せ。

(3) 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $a+d=0$ かつ $A^* = -A$ を満たすとする。このとき $A = xI + yJ + zK$ を満たす実数 $x,\ y,\ z$ が存在することを示し、$x,\ y,\ z$ を求めよ。

問題 13. 行列 I, J, K, U を次のものとする。

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}.$$

(1) 積 UU^*, UIU^*, UJU^*, UKU^* をそれぞれ求めよ。

(2) 実数 x, y, z に対して方程式 $U(xI + yJ + zK)U^* = x'I + y'J + z'K$ を満たす実数 x', y', z' が存在することを示し、x', y', z' を求めよ。

問題 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし、E を３次の単位行列とする。

(1) 積 AB, BA をそれぞれ求めよ。

(2) ３次正方行列 X が $AX = E$ を満たす必要十分条件は $2X = B$ であることを示せ。

(3) 2×3 行列 X が $XA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす必要十分条件は $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問題 15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし、E を３次の単位行列とする。

(1) 積 A^2, A^3 をそれぞれ求めよ。

(2) 正の整数 n に対して $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = E + nA + \dfrac{n(n-1)}{2}A^2$ であることを示せ。

問題 16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ とし、E を３次の単位行列とする。

(1) 積 A^2, A^3 をそれぞれ求めよ。

(2) $AB = E$ を満たす３次正方行列 B はないことを示せ。

(3) $(E + A)(E - A + A^2)$ をできるだけ簡単になるよう変形せよ。

(4) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ は逆行列を持つことを示し、また逆行列を求めよ。