平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.2（4 月 16 日配付）略解

問題 1. (1) $AB = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2. (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} -1 & -7 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 8 & -8 & 6 \\ -8 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

問題 3. (1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $X = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) $X = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 9 \\ 21 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 5 \\ 13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

問題 4. (1) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(2) $(C+D)(C-D) = \begin{pmatrix} -5 & -12 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}$, $C^2 - D^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -1 \\ 16 & 8 & 11 \\ -7 & -10 & -4 \end{pmatrix}$.

問題 5. (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ 11 & -3 & 20 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} 13 & -43 \\ 75 & -14 \end{pmatrix}$,

$BC = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$, $A(BC) = \begin{pmatrix} 13 & -43 \\ 75 & -14 \end{pmatrix}$.

(2) $AB - 3B = \begin{pmatrix} -2 & -14 & -24 \\ 5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $(AB-3B)C = \begin{pmatrix} -2 & -76 \\ 33 & 1 \end{pmatrix} = A(BC) - 3BC$.

(3) A^2 は 2×2 行列、CB は 3×3 行列であるから。

問題 6. (1) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $AB + {}^tB\,{}^tA = 2C$, $AB - {}^tB\,{}^tA = 2D$.

(3) ${}^t(AB - C) = -D$, ${}^t(AB - D) = C$.

問題 7. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix}$, $D^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(2) E を 2 次の単位行列とする。

$$A^n = \begin{cases} A & n\ \text{奇数} \\ E & n\ \text{偶数} \end{cases},\quad B^n = \begin{cases} 2^{(n-1)/2}B & n\ \text{奇数} \\ 2^{n/2}E & n\ \text{偶数} \end{cases},\quad C^n = \begin{cases} E & n = 3k \\ C & n = 3k+1 \\ C^2 & n = 3k+2 \end{cases},$$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 32i \\ 32i & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8. (1) 略。

(2) $|m + n\omega|^2 = m^2 + n^2 - mn$ である。まず m, n ともに 2 で割りきれないときは m^2, n^2, mn はすべて奇数である。他方 m が 2 で割りきれ n が 2 で割りきれないときは m^2, mn はともに偶数で n^2 は奇数である。

問題 9. (1) $|(i-x)/(i+x)|^2 = (1+x^2)/(1+x^2)$, $(i-x)/(i+x) = (1-x^2+2ix)/(1+x^2)$.

(2) $x = \sqrt{3}$

問題 10. (1) $c^2 + d^2 \neq 0$ より $c + id$ は $(c - id)/(c^2 + d^2)$ で与えられる逆数を持つ。

(2) $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ であるから。

(3) 一般に $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ であるから。

問題 11. (1) 略。

(2) z が非負の実数であるための必要十分条件は $\mathrm{Re}\, z = |z|$ である。

(3) $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Re}(z/i)$ である。

問題 12. (1) $xI + yJ + zK = \begin{pmatrix} iz & ix - y \\ ix + y & -iz \end{pmatrix}$ である。

(2) A が I, J, K のいずれかのとき $A^* = -A$ を満たす。

(3) 条件より $\mathrm{Re}\, a = 0$, $d = -a$, $c = -\bar{b}$ である。$x = \mathrm{Im}\, b$, $y = -\mathrm{Re}\, b$, $z = \mathrm{Im}\, a$ が求めるものである。

問題 13. (1) $UU^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $UIU^* = (\cos 2\theta)I + (\sin 2\theta)J$,

$UJU^* = -(\sin 2\theta)I + (\cos 2\theta)J$, $UKU^* = K$.

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

問題 14. (1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = BA.$

(2) $AX = E$ の両辺に B を左からかける。

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

問題 15. (1) 積 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E + A$ であることに注意して帰納法を適用。

問題 16. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $a \neq 0$ のときは $AB = E$ の両辺に A^2 を左からかけると $O = A^2$ という矛盾が得られる。また $a = 0$ のときは $AB = E$ が既に矛盾である。

(3) $(E + A)(E - A + A^2) = E.$

(4) 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 - a & -a & 1 \end{pmatrix}$ である。