

平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限, 総合科学部 K305

プリント No.3 (4月 23 日配付)

スペースの都合上、列ベクトルを行ベクトルの転置によって表現することがある。例えば $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と書くべきところを $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$ と表記するなどである。記号などはおおむね中木先生が 4 月 16 日に配付されたプリントに従う。

問題 1. (1) 点 $(2, 2, 2)$ を通り、方向が ${}^t(3 \ 2 \ 1)$ の直線 g の方程式を求めよ。

(2) 直線 g と原点との距離を求めよ。

問題 2. ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(1 \ -1 \ 1)$, $\mathbf{b} = {}^t(2 \ -3 \ 4)$, $\mathbf{c} = {}^t(0 \ 0 \ 3)$ が与えられたとする。

(1) 点 (x, y, z) の位置ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x \ y \ z)$ は、実数 s, t により

$$\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

と表されたとする。上の式から s, t を消去して、平面の方程式を求めよ。

(2) 上で求めた平面と原点との距離を求めよ。

定義 1. ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$ が直交するとは $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ であることをいう。ここでは内積の定義は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ としている。

問題 3. (1) 定義 1 で述べた直交条件とプリント No.1 で述べた垂直条件 (高校数学 B) との違いはどこにあるか?

(2) 空間ベクトル \mathbf{b}, \mathbf{c} が直交するなら $\|s\mathbf{b} + t\mathbf{c}\|^2 = s^2\|\mathbf{b}\|^2 + t^2\|\mathbf{c}\|^2$ (s, t は実数) が成り立つことを示せ。

(3) 空間ベクトル \mathbf{b}, \mathbf{c} は直交しかつ共に 0 でないと仮定する。このとき $s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{0}$ を満たす実数の組 s, t は $s = 0, t = 0$ に限ることを示せ。

問題 4. 大きさ 1 の空間ベクトル \mathbf{e} と一般の空間ベクトル \mathbf{a} が与えられたとする。

(1) ベクトル $\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$ は \mathbf{e} と直交することを示せ。

(2) $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 t が動くとき $\|\mathbf{a} - t\mathbf{e}\|^2$ は最小値をもつことを示し、さらに最小値とそのときの t の値を求めよ。

(4) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}| \leq \|\mathbf{a}\|$ が成り立つことを示せ。また $\mathbf{a} = k\mathbf{e}$ となる実数 k が存在するためには等号の成立することが必要十分であることを示せ。

問題 5. 大きさ 1 の空間ベクトル \mathbf{n} と実数 d が与えられたとする。このとき位置ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x \ y \ z)$ の条件 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = d$ で表される平面 α について以下の問いに答えよ。

(1) 点 P を一つ固定し、その位置ベクトルを \mathbf{p} とする。点 (x, y, z) が α 上にあるとき

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{x} - (d\mathbf{n} + \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})\|^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d)^2$$

が成り立つことを示せ。

(2) 点 (x, y, z) が α 上を動くとき $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ は最小値 $|\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d|$ をもつことを示し、さらに最小となる \mathbf{x} を求めよ。

注 1. 問題 5.(2) より平面 α と点 P との距離が $|\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d|$ で与えられることが分かる。

定義 2. 空間ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$ に対して

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := {}^t(a_2b_3 - a_3b_2 \ a_3b_1 - a_1b_3 \ a_1b_2 - a_2b_1)$$

によって定義される空間ベクトルを \mathbf{a} , \mathbf{b} のベクトル積という。

問題 6. (1) $\mathbf{e}_1 := {}^t(1 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{e}_2 := {}^t(0 \ 1 \ 0)$, $\mathbf{e}_3 := {}^t(0 \ 0 \ 1)$ とする。それらの可能な組み合わせすべてに対してベクトル積を求めよ。

(2) $\mathbf{a} := {}^t(-1 \ 5 \ -2)$ とする。このとき位置ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x \ y \ z)$ の条件 $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = 0$ で表される集合は直線であることを示し、その方程式を求めよ。

(3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 = 3$, $\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3 = {}^t(-2 \ 1 \ 0)$ を満たす空間ベクトル \mathbf{a} を求めよ。

(4) 空間ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} を与えたとき $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} , \mathbf{b} それぞれと直交することを示せ。

問題 7. 空間ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$, \mathbf{c} に対して以下を示せ。

(1) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ が成り立つ。

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ が成り立つ。

問題 8. $\|\mathbf{a}\| = 1$, $\|\mathbf{b}\| = 1$ かつ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ を満たす空間ベクトルの対 \mathbf{a} , \mathbf{b} を固定する。このとき $\mathbf{u} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ に対して以下を示せ。

(1) $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$ が成り立つ。

(2) $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{u} = 0$ を満たす実数の組 x, y, z は $x = 0, y = 0, z = 0$ に限る。

問題 9. 0 でない空間ベクトル \mathbf{u} と一般の空間ベクトル \mathbf{a} に対して以下を示せ。

(1) $\mathbf{a} = k\mathbf{u}$ となる実数 k が存在するためには $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = 0$ の成立が必要十分である。

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = 0$ かつ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$ となるためには $\mathbf{a} = 0$ の成立が必要十分である。

問題 10. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ を満たす空間ベクトルの対 \mathbf{b}, \mathbf{c} を固定する。このとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0 \text{ かつ } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$$

となる空間ベクトル \mathbf{a} をすべて求めよ。

問題 11. $\|\mathbf{b}\| = 1, \|\mathbf{c}\| = 1$ かつ $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ を満たす空間ベクトルの対 \mathbf{b}, \mathbf{c} を固定する。このとき $\mathbf{u} := \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ に対して以下を示せ。

- (1) $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{u}$ のいずれとも直交する空間ベクトルは $\mathbf{0}$ に限る。
- (2) 空間ベクトル \mathbf{a} に対して $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ が成り立つ。
- (3) 空間ベクトル \mathbf{a} に対して $\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2$ が成り立つ。

問題 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = (1 \ -7), D = (2)$ とする。

- (1) 行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ を具体的に書き下せ。
- (2) ${}^t \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix}$ を確かめよ。
- (3) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2$ を計算し $\begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ と比較せよ。

問題 13. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を n 項列ベクトルとする。以下の積を求めよ。

- (1) $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (3) $(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 14. A, B を n 次正方行列、 \mathbf{x}, \mathbf{y} を n 項列ベクトルとする。

- (1) 積 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ {}^t \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{y} \\ {}^t \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。
- (2) A が正則行列なら $\begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ {}^t \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ もそうであることを示し逆行列を求めよ。

定義 3. n 次正方行列 A に対してその対角成分の和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ を A のトレースといい $\text{tr } A$ で表す。

問題 15. A, B を n 次正方行列、 k を複素数とする。

- (1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$ をそれぞれ示せ。
- (2) $\operatorname{tr}^t A = \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} \bar{A} = \overline{\operatorname{tr} A}$ をそれぞれ示せ。
- (3) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ を示せ。
- (4) $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$ を示せ。(P は正則行列)

問題 16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3i \\ 2i & -2 & -i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B + \operatorname{tr} C = \operatorname{tr}(A+B+C)$ を確かめよ。
- (2) $\operatorname{tr} B^*$, $\operatorname{tr}(CA)$ をそれぞれ求めよ。
- (3) $\operatorname{tr}(ABC)$ を求めよ。

問題 17. 行列 I, J, K を次のものとする。

$$I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

- (1) $\operatorname{tr} I^2$, $\operatorname{tr} J^2$, $\operatorname{tr} K^2$, $\operatorname{tr}(IJ)$, $\operatorname{tr}(JK)$, $\operatorname{tr}(KI)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 2 次正方行列 A は $\operatorname{tr} A = 0$ かつ $A^* = -A$ を満たすとする。このとき

$$2A = -\operatorname{tr}(AI)I - \operatorname{tr}(AJ)J - \operatorname{tr}(AK)K$$

が成り立つことを示せ。

問題 18. $AB - BA = E$ を満たす n 次正方行列 A, B は存在しないことを示せ。

問題 19. 次の行列それぞれについて積が交換可能な行列をすべて求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 20. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $A = B + aE$ と書けることをふまえて、3 次正方行列 X に対し、 A と X との積が交換可能である必要十分条件は B と X との積が交換可能であることを示せ。
- (2) A と積が交換可能な行列 X をすべて求めよ。