平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.3（4 月 23 日配付）略解

問題 1. (1) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z-2$

(2) 原点を通り直線 g に垂直な平面の方程式は $3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 0$ である。これと直線 g の交点は $(-4/7, 2/7, 8/7)$ となるので求める距離は $2\sqrt{21}/7$ である。

問題 2. (1) 成分で表示すると $\mathbf{x} = {}^t(s+2t \quad -s-3t \quad s+4t+3)$ である。s, t を消去して $x+2y+z=3$ を得る。

(2) Hesse の標準型から求める距離は $\sqrt{6}/2$ である。ちなみに

$$(s+2t)^2 + (-s-3t)^2 + (s+4t+3)^2 = 3(s+3t+1)^2 + 2(t+3/2)^2 + (\sqrt{6}/2)^2$$

問題 3. (1) 成分により内積の定義し、$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ とは仮定していないこと。

(2) 条件 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$ を考慮に入れて内積の性質を使うと

$$\|s\mathbf{b} + t\mathbf{c}\|^2 = (s\mathbf{b} + t\mathbf{c}) \cdot (s\mathbf{b} + t\mathbf{c}) = s^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + t^2 \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = s^2 \|\mathbf{b}\|^2 + t^2 \|\mathbf{c}\|^2.$$

(3) 条件 $s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{0}$ は (2) より $s^2\|\mathbf{b}\|^2 + t^2\|\mathbf{c}\|^2 = 0$ と表現できる。さて $\|\mathbf{b}\| \neq 0$, $\|\mathbf{c}\| \neq 0$ であるからこのようなことが起こるのは $s=0$, $t=0$ に限る。

問題 4. (1) 内積の性質を使うと $(\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$ と変形できる。ベクトル $\mathbf{e}$ の大きさは 1 すなわち $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$ であるから、右辺は 0 である。

(2) (1) と問題 3. (2) より $\|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2 \|\mathbf{e}\|^2$

(3) (2) と同様の考察により

$$\|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) - t)\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2 + ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}) - t)^2.$$

よって最小値は $\|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2$ であり、そうなるのは $t = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})$ のときのみである。

(4) (2) により $\|\mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2 = \|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}\|^2 \geq 0$ である。等号が成立するなら $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$ である。即ち $\mathbf{a} = k\mathbf{e}$ となる実数 k が存在する。逆に $\mathbf{a} = k\mathbf{e}$ であれば $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = k$ となるので等号が成立する。

問題 5. (1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = d$ により $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = d - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$ が成り立つ。よって

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p} - (d - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (d - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{p} - (d - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\|^2 + (d - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2$$

が問題 4. (2) と同様の考察により導かれる。

(2) ベクトル $\mathbf{p}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ と直交するので、位置ベクトル $d\mathbf{n}+\mathbf{p}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ を持つ点は α 上にある。よって (1) により最小値は $|\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}-d|$ であり、そうなるのは $\mathbf{x}=d\mathbf{n}+\mathbf{p}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ のときのみである。

問題 6. (1) $\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$ $i=1,2,3.$ $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1,$ $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2$.

(2) $\mathbf{a}\times\mathbf{x}={}^t(5z+2y\quad -2x+z\quad -y-5x)$ であるから $x=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{2}$ という条件に帰着する。これは直線の方程式である。

(3) ${}^t(-1\quad -2\quad 3)$

(4) 直接計算することにより $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$ が確かめられる。

問題 7. いずれも直接計算により確かめられる。

問題 8. (1) 問題 6.(4) と問題 7.(1)

(2) 問題 3. (3) と同様。

問題 9. (1) $\mathbf{a}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ とすると問題 7.(1) により $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})^2=\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{u}\|^2$ が成り立つ。$\mathbf{e}=\dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ として問題 4. (4) を適用すると $\mathbf{a}=k\mathbf{u}$ となる実数 k が存在することが分かる。逆に $\mathbf{a}=k\mathbf{u}$ であれば $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$ となる。

(2) $\mathbf{a}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ かつ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}=0$ とすると問題 7.(1) により $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{u}\|^2=0$ が得られる。$\|\mathbf{u}\|\neq 0$ なのでこれは $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ を意味する。逆は明らか。

問題 10. 問題 7.(2) により $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$ なら $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{0}$ が成り立つ。よって問題 9.(2) を適用して求める空間ベクトル $\mathbf{a}$ は $\mathbf{0}$ のみであることが分かる。

問題 11. (1) 問題 10 から直ちに分かる。

(2) ベクトル $\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$ は $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ のいずれとも直交するので (1) を適用して $\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{0}$ を得る。

(3) (2) で得た関係に問題 3. (2) と同様の考察を行う。

問題 12. (1) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) ${}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -22 & 5 \\ 6 & -30 & 14 \\ -11 & -15 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2+BC & AB+BD \\ CA+DC & CB+D^2 \end{pmatrix}$

問題 13. (1) $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & c\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1+c\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

問題 14. (1) $\begin{pmatrix} AB & \mathbf{x}+A\mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$

(2) 逆行列は $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\mathbf{x} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。

問題 15. 略

問題 16. (1) $\operatorname{tr} A = 5$, $\operatorname{tr} B = 4+2i$, $\operatorname{tr} C = -6$, $\operatorname{tr}(A+B+C) = 3+2i$

(2) $\operatorname{tr} B^* = 4-2i$, $\operatorname{tr}(CA) = 6$

(3) $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(C(AB)) = \operatorname{tr}((CA)B) = \operatorname{tr}((2E)B) = 2\operatorname{tr} B = 8+4i$

問題 17. (1) $\operatorname{tr} I^2 = -2$, $\operatorname{tr} J^2 = -2$, $\operatorname{tr} K^2 = -2$, $\operatorname{tr}(IJ) = 0$, $\operatorname{tr}(JK) = 0$, $\operatorname{tr}(KI) = 0$.

(2) プリント No2 問題 12.(3) によれば $A = xI + yJ + zK$ を満たす実数 x, y, z が存在する。(1) を適用すると $\operatorname{tr}(AI) = -2x$, $\operatorname{tr}(AJ) = -2y$, $\operatorname{tr}(AK) = -2z$ であることが分かる。もちろん直接計算してもよい。

問題 18. $\operatorname{tr}(AB-BA) = 0$, $\operatorname{tr} E = n$.

問題 19. (1) $\begin{pmatrix} 2a & a-b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

問題 20. (1) $AX - XA = BX - XB$

(2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$