平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.4（5 月 7 日配付）

問題 1. 次の行列についてそれぞれ逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3i & -1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

問題 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A, B それぞれの逆行列を求めよ。

(2) $A+B, A-B$ それぞれについて逆行列を持つか判定し、持つならば逆行列を求めよ。

問題 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7i \\ i & -2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) ${}^t(A^{-1})$, $({}^tA)^{-1}$ をそれぞれ求め、一致することを確かめよ。

(2) $\overline{B^{-1}}$, $(\overline{B})^{-1}$ をそれぞれ求め、一致することを確かめよ。

(3) $(AB)^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$ をそれぞれ求め、一致することを確かめよ。

問題 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A^2 を求めよ。また B^2, B^3, B^4 を求めよ。

(2) A, B それぞれについて逆行列を持つことを示し、更に逆行列を求めよ。

問題 5. 次の行列について $AB = E$ という条件から直接計算により逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

問題 6. 次の行列についてそれぞれ逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ i & -1 & -i \\ i & i & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

問題 7. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下を示せ。
(1) $A^2 - A + E = O$. (2) $A^6 = E$. (3) A^{100} は逆行列を持つ。

問題 8. 正方行列 A に対して $A^2 + A + E = O$ が成り立つと仮定する。ここで E は A と同じ型の単位行列、また O は A と同じ型の零行列である。

(1) 実数値を成分とする行列 A の例をあげよ。

(2) $A^n = E$ を満たす正の整数 n が存在することを示せ。またそのような n の最小値を求めよ。

問題 9. A を n 次正方行列 B を $n \times m$ 行列 D を m 次正方行列とする。A, D が正則なら正方行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \quad \text{ただし} O \text{は} m \times n \text{零行列}$$

も正則であることを示し、更に逆行列を求めよ。

問題 10. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ についてそれぞれ逆行列を求めよ。

問題 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A は正則であることを確かめよ。

(2) AB が正則であるかどうか判定せよ。

(3) B が正則であるとすると矛盾することを示せ。

問題 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A が正則であるかどうか調べよ。正則ならば逆行列を求めよ。

(2) AB が正則であるかどうか調べよ。

問題 13. A, B が n 次正方行列であるとき、A, B が共に正則である必要十分条件は AB, BA が共に正則であることを示せ。