平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.4（5 月 7 日配付）略解

問題 1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} -2i/7 & -i/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

問題 2. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 3/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. $A+B$ は正則でない。

問題 3. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $({}^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7i \\ i & -4 \end{pmatrix}$, $(\overline{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7i \\ -i & -4 \end{pmatrix}$.

(3) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 10+21i & -6-14i \\ -12+5i & 8-3i \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1}$.

問題 4. (1) A^2 は 3 次の単位行列である。B^2, B^3, B^4 については以下の通り。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) A の逆行列はそれ自身。また $B(B^3) = (B^3)B = B^4 = E$ であるから B も逆行列を持ち、逆行列は B^3（具体的な形は上にある）で与えられる。

問題 5. (1) $\begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -1/3 \\ -2 & 11/3 & 7/3 \\ -1 & 4/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

問題 6. (1) $\begin{pmatrix} 3/14 & -1/14 & 5/14 \\ 5/14 & 3/14 & -1/14 \\ -1/14 & 5/14 & 3/14 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2-i/2 & -1/2-i/2 \\ 1/2+i/2 & 0 & 1/2-i/2 \\ -1/2+i/2 & 1/2+i/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

問題 7. (1) 直接計算しかない。(2) $O = (A^2 - A + E)(A + E) = A^3 + E$ より $A^3 = -E$ が得られる。(3) $A^{100} = (A^6)^{16} A^4 = A^4$ は A^2 を逆行列に持つ。

問題 8. (1) $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. ケーリー・ハミルトンの定理ファンなら $\operatorname{tr} A = -1$, $\det A = 1$ を満たす 2 次正方行列なら何でも良いと気づくであろう。

(2) $O = (A^2 + A + E)(A - E) = A^3 - E$ より $A^3 = E$ が得られる。よって $n = 3$ に対して $A^n = E$ が成り立つ。また $A = E$ あるいは $A^2 = E$ と仮定すると $3E = O$ という矛盾が得られる。よって $A^n = E$ が成り立つような n の最小値は 3 である。

問題 9. 行列の区分けについての計算法則は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ DC' & DD' \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'B + B'D \\ C'A & C'B + D'D \end{pmatrix}.$$

これと逆行列があるという条件とを照らし合わせると

$$AA' + BC' = E_n, AB' + BD' = O_{nm}, DC' = O_{mn}, DD' = E_m,$$
$$A'A = E_n, A'B + B'D = O_{nm}, C'A = O_{mn}, C'B + D'D = E_m.$$

ここで A, D は正則であるから、$A' = A^{-1}$, $D' = D^{-1}$, $C' = O$, $B' = -A^{-1}BD^{-1}$ が導かれる。逆にこのように A', B', C', D' を選ぶ。確かに

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

は逆行列を与えている。

問題 10. A, B, C はいずれも問題 9 で考察した行列のパターンにマッチする。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 11 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 11. (1) A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を逆行列に持つ。

(2) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、他方 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすような a_{ij} は存在しない。よって AB は正則でない。

(3) B が正則であるとする。さて (1) で確かめたように A は正則である。従って

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = E = (B^{-1}A^{-1})AB$$

が成り立つので AB は正則ということになる。これは (2) で確かめたことと矛盾する。

問題 12. (1) A は $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ を逆行列に持つ。

(2) 問題 11(3) で見たように B は正則でない。再び同じ議論を繰り返すこと（背理法）により AB は正則でないことが示せる。

問題 13. A, B が共に正則であると仮定する。このとき

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = E = (B^{-1}A^{-1})AB,\ BA(A^{-1}B^{-1}) = E = (A^{-1}B^{-1})BA$$

であるから AB, BA は共に正則である。

逆に AB, BA が共に正則であると仮定する。このとき

$$A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = E = (BA)^{-1}BA = ((BA)^{-1}B)A$$

が成り立つ。この時点では右からかける行列 $B(AB)^{-1}$ と左からかける行列 $(BA)^{-1}B$ の見かけが違うのでまだ A に逆行列があるとはいえない。結合則を活用して

$$B(AB)^{-1} = \underbrace{(BA)^{-1}BA}\,B(AB)^{-1} = (BA)^{-1}B\,\underbrace{AB(AB)^{-1}} = (BA)^{-1}B$$

と確かめることによってとどめを刺す必要がある。同様に

$$B(A(BA)^{-1}) = BA(BA)^{-1} = E = (AB)^{-1}AB = ((AB)^{-1}A)B$$
$$A(BA)^{-1} = \underbrace{(AB)^{-1}AB}\,A(BA)^{-1} = (AB)^{-1}A\,\underbrace{BA(BA)^{-1}} = (AB)^{-1}A$$

と計算して B にも逆行列があることが示せる。

注 1. 行列式とその諸性質を既知とすれば、次の命題が成り立つことが示せる。

> A, B が n 次正方行列であるとき、AB が正則であるためには A, B が共に正則であることが必要十分である。

問題 13 の解答例で使った論法は行列式という概念が有効でない場合（無限次元！）でも使える。