平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.5（5 月 14 日配付）

定義 1.（講義で使用しているテキストではもっと広い意味で**階段行列**という用語を使用しているので、それと区別するため）次の形の行列を**標準階段行列**という。

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots\cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & 1 & * & \cdots\cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & \text{\Large 0} & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}\right) & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \boxed{r} \\ r+1 \\ \vdots \end{array}
\end{array}$$

ここで $*$ はワイルドカードを表す。標準階段行列の定義を成文化してみよう。まず、零ベクトル $\mathbf{0} = (0 \quad \cdots \quad 0)$ でない行ベクトルには $\underline{0\text{でない成分}}$ があるが、左から見て最初にそれが現れる位置を**ステップ**と呼ぶことにする。

(1) 着目行から下降するとき（もしあるなら）下の行は $\mathbf{0}$ であるかまたはそのステップが右に 1 以上ずれる。着目行が $\mathbf{0}$ ならその下の行も $\mathbf{0}$ である。

(2) すべてのステップ成分は 1 である。またステップの上にある成分はすべて 0 である。

零行列は標準階段行列である。明らかに $\mathbf{0}$ でない行ベクトル数とステップ数は同じである。

例 1. 2×2 タイプの標準階段行列をすべてあげてみよう。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a\text{ は任意の実数} \quad (4)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

それぞれのステップ数を書き出すと (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 2 となる。

問題 1. 次のタイプの標準階段行列をすべて求めよ。
(1) 3×2 行列 (2) 2×3 行列 (3) 1×4 行列

定義 2. 階段行列において $\mathbf{0}$ でない行ベクトルの個数をその行列の**階数**という。定義 1 にある形では r が階数である。

問題 2. (1) 4×2 タイプの標準階段行列で階数が 3 のものは存在するか。

(2) 2×4 タイプの標準階段行列で階数が 1 のものをすべて求めよ。

(3) 3×4 タイプの標準階段行列で階数が 3 のものをすべて求めよ。

例 2. 行列は右辺が 0 であるような連立方程式に対応する。例えば

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=0\\0x+0y=0\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}0x+y=0\\0x+0y=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}x+ay=0\\0x+0y=0\end{cases}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}x+0y=0\\0x+y=0\end{cases}$$

のごとく対応する。それぞれの解は容易に求まり、例えば次のように表にまとめられる。

行列	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
解	$s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$s\begin{pmatrix}-a\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ここで s, t などは任意に選べる実数（状況によっては複素数）である（a は方程式のデータであり、あらかじめ指定されているので s, t とは役割が違う）。

問題 3. 次の行列それぞれについて対応する連立方程式の解を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}0&1&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}1&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad(5)\ \begin{pmatrix}1&a&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad(6)\ \begin{pmatrix}1&0&b\\0&1&a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

問題 4. 次の行列それぞれについて対応する連立方程式の解を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}0&1&a&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}0&1&0&b\\0&0&1&a\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1&a&b&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad(5)\ \begin{pmatrix}1&b&0&c\\0&0&1&a\end{pmatrix}\quad(6)\ \begin{pmatrix}1&0&c&d\\0&1&a&b\end{pmatrix}$$

以下では行基本変形および基本行列に関する事項は説明せずに用いる（必要ならテキストの該当部分を参照せよ）。

問題 5. 次の行列を行基本変形によって標準階段行列にせよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&0&7\\2&2&-1\end{pmatrix}\quad(2)\ \begin{pmatrix}2&1&-3\\-4&-2&6\end{pmatrix}\quad(3)\ \begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad(5)\ \begin{pmatrix}2&-4&6&4\\0&0&1&3\\-3&6&-1&-4\end{pmatrix}$$

問題 6. 次の行列を行基本変形によって標準階段行列にせよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3a+1 \\ 2 & -1 & 3 & 2a+4 \\ 5 & 1 & 5 & 7a+1 \end{pmatrix}$$

問題 7. 次の行列を行基本変形によって標準階段行列にせよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 8. (1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ から行基本変形によって得られる標準階段行列は、それぞれ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$ の形であることを示し、更に A, B を求めよ。

(2) A, B はそれぞれ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列であることを確認せよ。

問題 9. 次の行列について問題 8 の考え方によって逆行列を求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 10. 逆行列を求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & -5 \\ -9 & -7 & -4 & 7 \\ -4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 11. 行基本変形により標準階段行列にせよ。 (1) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & a \end{pmatrix}$

ここで a は実数であるとする。

問題 12. 行基本変形により標準階段行列にせよ。 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a & 2 \\ 2 & a & 3 & 3 \end{pmatrix}$