

平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.5 (5月14日配付) 略解

問題 1. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \end{pmatrix}.$

問題 2. (1) 階数は行、列のいずれのサイズよりも大きくはなれないから存在しない。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

問題 3. (1) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $s \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (5) $s \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (6) $s \begin{pmatrix} -b \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 4. (1) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $s \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (5) $s \begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ (6) $s \begin{pmatrix} -c \\ -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -d \\ -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 5. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -15/2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 6. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & -2a+3b \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (5a-15)/11 \\ 0 & 1 & 0 & (12a-14)/11 \\ 0 & 0 & 1 & (8a+20)/11 \end{pmatrix}$

問題 7. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

問題 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -9 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 9/20 & 2/5 & 1/4 \\ -3/20 & 1/5 & 1/4 \end{pmatrix}$

問題 9. (1) $\begin{pmatrix} 1/4 & -7/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

問題 10. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 8/5 & 7/10 & -3/10 \\ 3/10 & 7/20 & -3/20 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 18 & 11 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

問題 11. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (2) $a = 5$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a \neq 5$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

注 1. 複素数の範囲で考えると (1) は場合分けが必要である。

問題 12. (1) $a = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a = -2$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$a \neq 1, a \neq -2$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $a = 2$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a = -3$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$a \neq 2, a \neq -3$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/(3+a) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(3+a) \end{pmatrix}$